

Simulation de la mise en forme des composites thermoplastiques

Damien Soulat, Anthony Cheruet, Majed Youssef, Philippe Boisse

▶ **To cite this version:**

Damien Soulat, Anthony Cheruet, Majed Youssef, Philippe Boisse. Simulation de la mise en forme des composites thermoplastiques : Elément fini de coque à pincement pour l'analyse de la reconsolidation. Revue Européenne de Mécanique Numérique/European Journal of Computational Mechanics, 2006, 15 (4), pp.379-408. 10.3166/remn.15.379-408 . hal-00081066

HAL Id: hal-00081066
https://hal.science/hal-00081066

Submitted on 16 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Simulation de la mise en forme des composites thermoplastiques

Elément fini de coque à pincement pour l'analyse de la reconsolidation

Damien Soulat* — Anthony Cheruet*
Majed Youssef* — Philippe Boisse **

** Laboratoire de Mécanique des Systèmes et des Procédés, LMSP*
CNRS/ENSAM-Paris/Université d'Orléans
Polytech'Orléans, 8 rue Léonard de Vinci, F-45072 Orléans cedex
Damien.soulat@univ-orleans.fr

*** Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides, LaMCoS*
UMR CNRS 5514, INSA de Lyon, F-69621 Villeurbanne cedex

RÉSUMÉ. *Un élément fini de coque est proposé dans l'objectif de simuler le procédé de fabrication des composites à fibres continues et à matrice thermoplastique. Cet élément qui ne repose pas sur l'hypothèse classique de contrainte normale nulle dans l'épaisseur est nécessaire pour simuler l'étape de reconsolidation qui est indispensable dans le procédé pour résorber les porosités. Cet élément conserve les cinq degrés de liberté des approches classiques de coque, auxquels est ajoutée la variation d'épaisseur. Un phénomène de verrouillage « en pincement » est mis en évidence et résolu par un découplage des composantes de flexion et de pincement dans la loi de comportement. Un ensemble de tests de validation est présenté, ainsi que la simulation du procédé qui montre que les contraintes normales sont en bonne adéquation avec les résultats expérimentaux de reconsolidation.*

ABSTRACT. *A shell finite element with transverse stress is proposed in this paper in order to simulate the forming of thermoplastic composites reinforced with continuous fibres. This shell finite element which doesn't use the classical assumption of zero normal stress component through the thickness is necessary to simulate the reconsolidation stage which have an essential role to remov some defaults like porosities. The proposed shell finite element keeps the five degrees of freedom of the standard shell elements and adds a sixth one which is the variation in thickness. A"pinching" locking phenomena is avoided by uncoupling bending and pinching in the behaviour operator. A set of classical validation tests prove the efficiency of this approach. Finally, a forming process is simulated. It shows that the computed transverse stresses are in good agreement with porosity removing in the experiments.*

MOTS-CLÉS : *composites, mise en forme, porosités, élément fini de coque, contrainte normale transverse, verrouillage en pincement.*

KEYWORDS: *composites, forming, porosities, shell finite element, transverse stress, pinching locking.*

1. Introduction

Les procédés de mise en forme des matériaux composites par des opérations de type emboutissage par poinçon matrice sont des opérations complexes qui font intervenir de nombreux paramètres. Les géométries de l'outillage et du serre flan, les efforts sur les outils, ainsi que les conditions de contact frottement sont autant de paramètres influant qu'il est nécessaire de bien déterminer de façon à garantir le succès de l'opération. Dans le cas des composites à fibres continues et à matrice thermoplastique (CFRTP : *Continuous Fibre Reinforced Thermoplastic*), d'autres paramètres tels que la température, la pression appliquée ainsi que la séquence d'empilement viennent également s'ajouter à ces paramètres qui interagissent. La nécessité de disposer d'un outil de simulation afin de déterminer la faisabilité d'une géométrie donnée associée à un jeu de paramètres satisfaisants s'avère indispensable dans une optique de réduction des coûts de développement d'un nouveau procédé. Pour des matériaux composites, un outil de simulation de la mise en forme des pièces minces devra être capable de prédire l'orientation finale des fibres, l'épaisseur finale mais aussi la qualité finale du produit (présence de porosités, de plissements, ruptures éventuelles des fibres). Il existe aujourd'hui certains codes de calculs par éléments finis dédiés à la simulation de la mise en forme par emboutissage. Une majorité de ces codes utilise une approche de dynamique explicite, développée à l'origine pour des études en dynamique rapide telles que le crash ou l'impact haute vitesse. Ces méthodes sont appliquées à la simulation de l'emboutissage des tôles (Makinouchi *et al*., 1993 ; Rojek *et al.*, 1998 ; Stasik *et al*., 1998 ; Guo *et al.*, 2000 ; Wagonner *et al.*, 2001). Dans ces codes la tôle emboutie est généralement modélisée par des éléments finis de coques compte tenu de la géométrie mince de celle-ci (Galbraith *et al.*, 1991). L'hypothèse de base de contrainte normale nulle selon l'épaisseur de l'élément de coque s'avère justifiée pour des étapes classiques d'emboutissage. Néanmoins cette hypothèse doit être contestée lorsque la pièce mince est soumise à une compression, selon la direction transverse, c'est-à-dire à du pincement. C'est le cas du procédé de mise en forme des CFRTP lors de la phase de reconsolidation. Pour modéliser cette phase, la solution proposée dans ce travail est dans le développement d'un élément fini de coque (dit « coque à pincement ») permettant le calcul des contraintes normales transverses pendant tout le procédé. La section suivante ($2) rappelle les étapes du procédé de mise en forme des CFRTP et l'analyse des défauts grâce aux micrographies réalisées à différents stades du procédé. Les choix pour la modélisation de ce procédé seront également définis. La section 3 présente la cinématique de la coque à pincement utilisée pour modéliser la contrainte/déformation transverse et en particulier la phase de reconsolidation. L'implémentation dans une approche explicite est décrite dans la section 4. Une difficulté de type verrouillage « en pincement » est mise en évidence dans la section 5, ainsi que la méthode permettant de palier au problème. Des tests de validation de l'élément sont présentés dans la section 6. Enfin l'utilisation de cet élément fini de coque à pincement pour la simulation du procédé de mise en forme et de reconsolidation d'un renfort en Z est illustrée dans la section 7. On montre que les

contraintes normales transverses calculées sont en bonne adéquation avec les fermetures de porosités expérimentales.

2. Modélisation du procédé de fabrication des composites à fibres longues et matrice thermoplastique

2.1. *Analyse micrographique des défauts lors d'un procédé*

Face aux difficultés liées à l'utilisation des prépregs thermoset (durée importante du cycle de polymérisation, difficulté de stockage des produits, difficulté du recyclage et des réparations), les composites à fibres continues et à matrice thermoplastique (CFRTP) apparaissent comme une alternative prometteuse (Cogswell *et al.*, 1992 ; Stockes, 1995 ; Krebs *et al.*, 1997). Ils sont en particulier présents et de façon importante dans les nouveaux avions civils tels que les AIRBUS A340-600, A380 (Maison *et al.*, 1998 ; Pora, 2001). La plaque thermoplastique est chauffée par infrarouges à une température de 400 °C qui est supérieure à la température de fusion de la matrice afin que celle-ci soit suffisamment fluide pour permettre la déformation. La plaque est mise en forme par emboutissage poinçon matrice puis soumise à une pression par le poinçon. C'est la phase de reconsolidation (figure 1). L'objectif de cette étape est de résorber les porosités résiduelles dans le matériau.

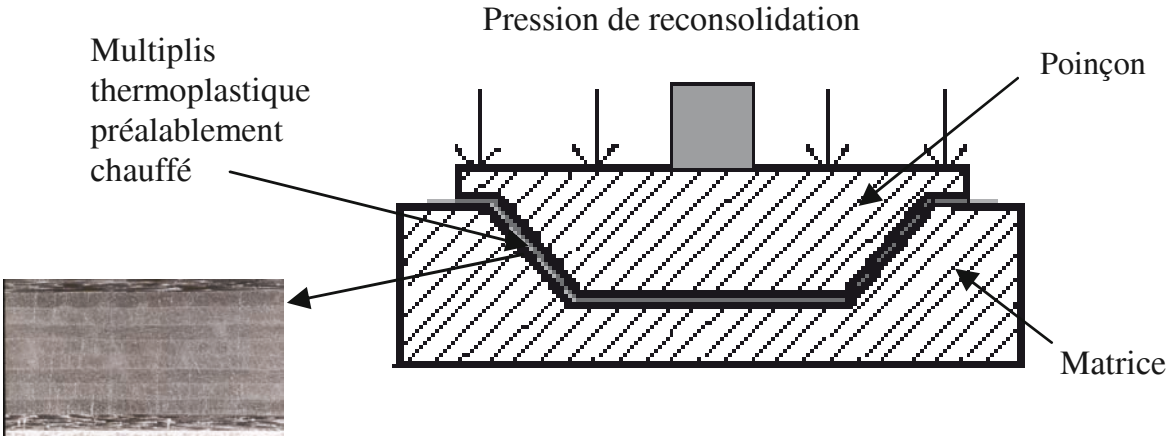


Figure 1. *Formage puis reconsolidation du multicouche thermoplastique préalablement chauffé*

Des essais ont été réalisés au Centre commun des recherches d'EADS Suresnes, dans le but de quantifier les porosités dans le matériau au cours du formage. Les poutres ont une section en Z et comportent 10 plis orientés à 0,90 et 45° (figure 2a). Des porosités importantes ont été mises en évidence pendant la phase de mise en forme (figure 2b). La phase de reconsolidation est donc essentielle puisqu'elle permet de résorber les porosités (figure 2c). Les détails de l'analyse expérimentale et l'ensemble des micrographies réalisées peuvent être trouvées dans (Cheruet, 2001).

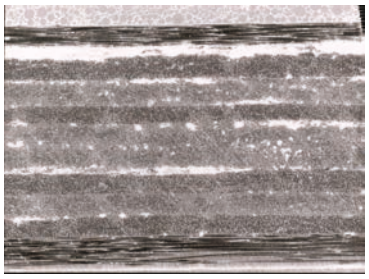
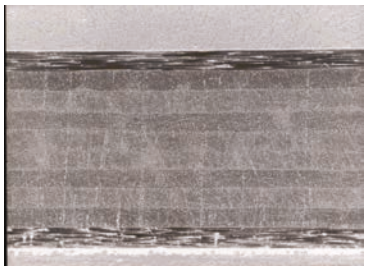
(a)  (b)  (c) 

Figure 2. *Analyse micrographique du laminé en début de formage et à l'issue de l'étape de reconsolidation*

Le phénomène de reconsolidation, c'est-à-dire la résorption des porosités a lieu à la fois durant la phase de compactage, mais aussi pendant le formage (dans les rayons de courbure de la pièce) en fonction de la géométrie et des efforts qui en découlent. Un modèle prédictif de la qualité de la reconsolidation s'avère nécessaire et doit être couplé au calcul complet de la mise en forme. Cette analyse de la compaction transverse sera un des objectifs majeurs de simulation du formage des CFRTP car la qualité du matériau passe par l'absence de porosités en particulier pour les applications aéronautiques (Maison *et al.*, 1998). Cette modélisation, dans le cadre d'une simulation élément fini, est l'objectif du présent travail. Pour cela un élément fini de coque avec « pincement » est développé de manière à déterminer la contrainte normale transverse au cours du formage. Celle-ci conditionne (à température donnée) la reconsolidation.

2.2. *Choix de modélisation du procédé*

Comme c'est le cas pour la simulation de l'emboutissage des tôles métalliques et compte tenu de la géométrie mince des plis, l'utilisation d'éléments finis de coques est justifiée. L'utilisation d'éléments membranaires s'avère insuffisante près des rayons de courbure (Wang *et al.*, 1988). Par contre la construction classique des modèles de coque et des éléments finis associés s'appuie sur une hypothèse de contrainte normale transverse σ_{33}, nulle. Cette hypothèse est généralement justifiée pour des modélisations de structures minces dont au moins une des deux faces (inférieure ou supérieure) est libre. Cette hypothèse n'est plus correcte dans les cas où les structures minces sont soumises à des efforts normaux importants sur les deux faces opposées. Nous parlerons dans ce cas de pincement. C'est le cas de la phase de reconsolidation des composites thermoplastiques pour laquelle la prise en compte de la contrainte normale transverse dans l'épaisseur est nécessaire car elle conditionne la résorption des porosités. Par ailleurs le phénomène de reconsolidation s'opérant également lors de l'étape de mise en forme, l'outil de simulation de la consolidation doit être actif pendant tout le formage. Dans cet objectif et afin d'éviter d'avoir recours à des éléments finis tridimensionnels, un élément fini de coque à pincement

(détaillé à la section suivante) a été développé. Il n'utilise pas l'hypothèse de contrainte normale transverse nulle, mais calcule cette composante en fonction des sollicitations appliquées et de la déformation dans l'épaisseur. Cette composante σ_{33} peut être, dans un premier temps, utilisée comme critère de consolidation. La compression des couches est utilisée comme élément d'autres critères de reconsolidation (Lee *et al.*, 1998), (Philips *et al.*, 1998).

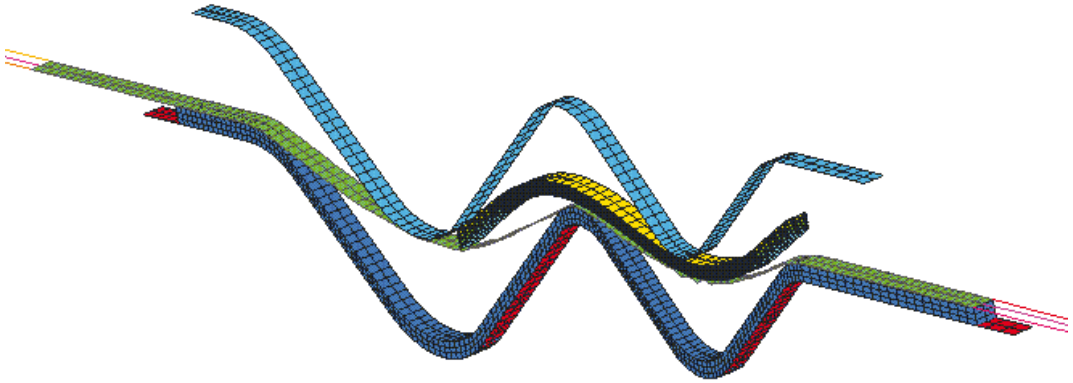


Figure 3. *Simulation de la mise en forme d'un laminé composé de 10 monoplis*

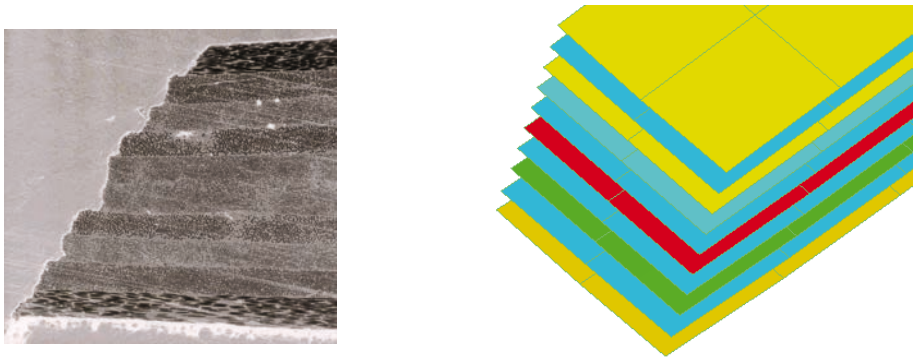


Figure 4. *Glissement interpli à l'extrémité du laminé (expérimental et calculé)*

La modélisation du formage doit être capable de décrire l'un des principaux modes de déformation qui est le glissement interpli. Le laminé est constitué de plusieurs monoplis qui, durant la mise en forme, glissent les uns par rapport aux autres.

Pour deux plis en contact de normale $\vec{\mathbf{n}}$, le glissement interpli est défini par $\vec{\mathbf{u}}_g = \vec{\mathbf{u}}_2 - \vec{\mathbf{u}}_1$, où $\vec{\mathbf{u}}_1$,$\vec{\mathbf{u}}_2$ sont les déplacements du point en contact respectivement vus du pli 1 et du pli 2 et tels que $(\vec{\mathbf{u}}_2 - \vec{\mathbf{u}}_1).\vec{\mathbf{n}} = 0$.

L'approche utilisée consiste à modéliser chaque monopli par une couche de coques. Le laminé est alors représenté par un empilement de coques en contact. Le glissement interpli est géré par l'introduction à chaque interface de lois de frottement visqueux (Murtagh *et al.*, 1993). Un exemple de la simulation de l'étape de mise en

forme dans le cas de la géométrie du raidisseur en forme de Z est montré sur la figure 3. Le glissement interpli calculé est en bonne adéquation avec celui obtenu expérimentalement (figure 4).

3. Elément fini de coque à pincement

3.1. *Cinématique de coque*

La position $\mathbf{x}$ d'un point de la coque peut être donnée par la position de son projeté sur la surface moyenne $\overline{\mathbf{x}}$ et de sa hauteur $\tilde{z}$ le long de la pseudonormale, notée $\hat{\mathbf{X}}$ (figure 5), avec $\tilde{z} = \zeta h$:

$$\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} + \tilde{z}\hat{\mathbf{X}} \qquad [1]$$

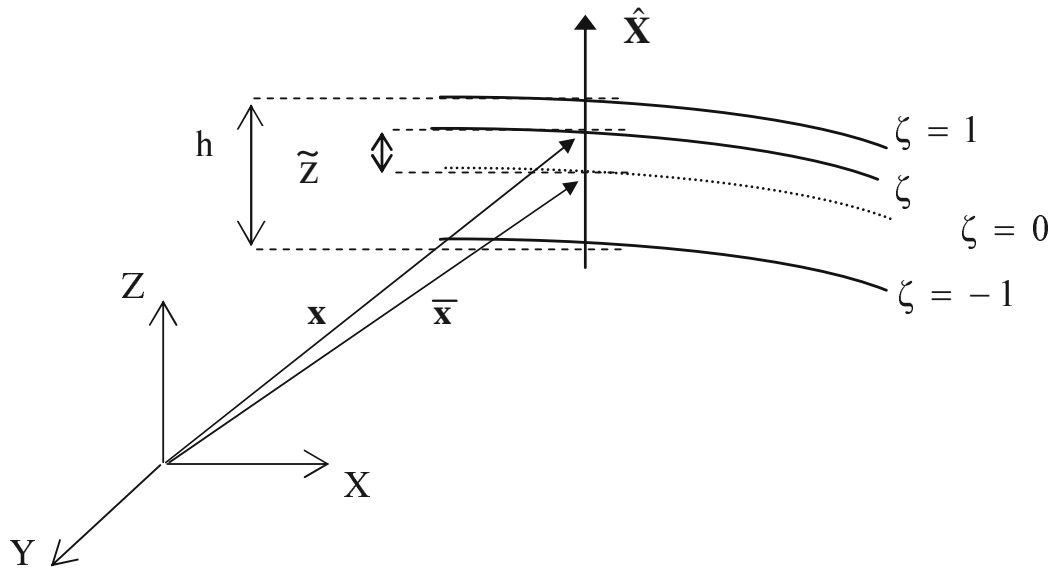


Figure 5. *Géométrie de la coque*

Si l'on note $\mathbf{x}^t$ la position d'un point quelconque de la coque à un temps t et $\mathbf{x}^0$ sa position initiale, le déplacement défini par $\mathbf{u} = \mathbf{x}^t - \mathbf{x}^0$, s'exprime alors :

$$\mathbf{u} = (\overline{\mathbf{x}}^t - \overline{\mathbf{x}}^0) + \tilde{z}^t\hat{\mathbf{X}}^t - \tilde{z}^0\hat{\mathbf{X}}^0 \qquad [2]$$

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + \tilde{z}^t(\hat{\mathbf{X}}^t - \hat{\mathbf{X}}^0) + (\tilde{z}^t - \tilde{z}^0)\hat{\mathbf{X}}^0 \qquad [3]$$

Le déplacement d'un point est représenté par la somme de trois termes : le déplacement du point situé sur la surface de référence, le déplacement dû aux

rotations de la pseudonormale, et le déplacement dû à la variation d'épaisseur de la coque. Dans les approches classiques, la forme du déplacement est :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \tilde{z}^t(\hat{\mathbf{X}}^t - \hat{\mathbf{X}}^0) \qquad [4]$$

La variation d'épaisseur est dans ce cas calculée en utilisant l'hypothèse de contrainte normale nulle (ou de contrainte plane). Des formulations éléments finis permettant de calculer les composantes de déformations/contraintes dans l'épaisseur ont été proposées (Simo *et al.*,1990 ; Butcher *et al.*, 1994 ; Bischoff *et al.*, 1997 ; Bletzinger *et al.*, 2000). Dans le travail présenté ici, l'élément fini développé contient un degré de liberté supplémentaire en chaque nœud qui est la variation de l'épaisseur (Coquery, 1999). Cette approche permet de différentier les composantes de déplacement dues à la rotation des pseudonormales de celles dues à la déformation dans l'épaisseur. Le déplacement dû à la variation d'épaisseur, noté Δh , n'est plus négligé et est défini, entre l'instant t et la configuration initiale, par :

$$\tilde{z}^t = \tilde{z}^0 + \Delta h \qquad [5]$$

A partir de [2], on obtient :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \tilde{z}^0(\hat{\mathbf{X}}^t - \hat{\mathbf{X}}^0) + \Delta h\hat{\mathbf{X}}^t \qquad [6]$$

En introduisant $\beta = \dfrac{\Delta h}{\tilde{z}^0} = \dfrac{\tilde{z}^t - \tilde{z}^0}{\tilde{z}^0}$, l'expression de la cinématique est alors :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \tilde{z}^0(\hat{\mathbf{X}}^t - \hat{\mathbf{X}}^0) + \tilde{z}^0\beta\hat{\mathbf{X}}^t \qquad [7]$$

Si $\mathbf{R}$ est la matrice de rotation qui fait passer le vecteur $\hat{\mathbf{X}}^0$ au vecteur $\hat{\mathbf{X}}^t$:

$$\tilde{z}^0(\hat{\mathbf{X}}^t - \hat{\mathbf{X}}^0) = \tilde{z}^0(1 - \mathbf{R}^T)\hat{\mathbf{X}}^t \qquad [8]$$

Avec l'hypothèse que ces rotations sont petites entre deux configurations (ici entre deux cycles de la résolution explicite), on obtient la forme approchée suivante :

$$(1 - \mathbf{R}^T)\hat{\mathbf{X}}^t = \boldsymbol{\theta} \wedge \hat{\mathbf{X}}^t \qquad [9]$$

où $\boldsymbol{\theta}$ est le vecteur rotation. La forme du déplacement est finalement :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\theta} \wedge \tilde{z}^0\hat{\mathbf{X}}^t + \tilde{z}^0\beta\hat{\mathbf{X}}^t \qquad [10]$$

β est le degré de liberté supplémentaire. C'est la variation relative d'épaisseur. Il est constant dans l'épaisseur. Un intérêt de cette cinématique est de conserver les 5 degrés de libertés classiques d'une coque (3 translations et 2 rotations), ce qui permet de continuer à appliquer les mêmes conditions limites ainsi que les mêmes efforts extérieurs. Si $\beta = 0$ l'équation [10] est équivalente à [4], soit à la cinématique d'un élément fini classique de coque.

3.2. *Expression des déformations*

Dans un repère local orthonormé, noté $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$, avec $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{X}}$, les composantes du tenseur des déformations (partie linéaire), s'expriment :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \qquad [11]$$

Les composantes du champ de déplacements sont issues de la cinématique [10], soit :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} - z\hat{\mathbf{e}}_3 \wedge \boldsymbol{\theta} + z\beta\hat{\mathbf{e}}_3 \qquad [12]$$

C'est-à-dire dans le repère $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$:

$$\begin{cases} u_x = \bar{u}_x + z\theta_y \\ u_y = \bar{u}_y - z\theta_x \\ u_z = \bar{u}_z + z\beta \end{cases} \qquad [13]$$

En dissociant les composantes de déformations membranaires et de flexion, de cisaillement transverse et de cisaillement transverse de pincement et de pincement pur, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^m \\ \varepsilon_{22}^m \\ 2\varepsilon_{12}^m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^f \\ \varepsilon_{22}^f \\ 2\varepsilon_{12}^f \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{13}^{ct} \\ 2\varepsilon_{23}^{ct} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{13}^{ctp} \\ 2\varepsilon_{23}^{ctp} \end{Bmatrix}; \{\varepsilon_{33}\} = \beta \qquad [14]$$

en ayant posé :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{m} \\ \varepsilon_{22}^{m} \\ 2\varepsilon_{12}^{m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{u}_{x,1} \\ \overline{u}_{y,2} \\ \overline{u}_{y,1} + \overline{u}_{x,2} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{f} \\ \varepsilon_{22}^{f} \\ 2\varepsilon_{12}^{f} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \theta_{y,1} \\ -\theta_{x,2} \\ -\theta_{x,2} + \theta_{y,1} \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{13}^{ct} \\ 2\varepsilon_{23}^{ct} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{u}_{z,1} + \theta_{y} \\ \overline{u}_{z,2} - \theta_{x} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{13}^{ctp} \\ 2\varepsilon_{23}^{ctp} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \beta_{,1} \\ \beta_{,2} \end{Bmatrix} \qquad [15]$$

La déformation dans l'épaisseur peut résulter soit d'une sollicitation directement dirigée selon l'épaisseur (pincement pur), soit d'un couplage avec les autres composantes de déformation. Par rapport à une formulation classique de coque, les composantes de cisaillement transverse et de pincement transverse sont modifiées. La composante de contrainte normale transverse dans l'épaisseur n'est pas nulle. Elle est obtenue à partir des déformations par la loi de comportement.

4. Implémentation de l'élément fini de coque à pincement

4.1. *Approche en dynamique explicite*

Le travail présenté dans ce papier a été réalisé en développant des modules spécifiques (Cheruet, 2001) du logiciel Pam Form (De Luca *et al.*, 1996). Ce logiciel utilise une approche en dynamique explicite par éléments finis. La discrétisation de la forme faible de l'équation du mouvement à l'instant t_i conduit à :

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_n^{(i)} + \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_n^i) = \mathbf{F}_{ext}^{(i)} \qquad [16]$$

avec $\mathbf{u}_n^i$ et $\mathbf{a}_n^i$ respectivement les déplacements et accélérations nodaux, $\mathbf{M}$ la matrice de masse, $\mathbf{F}_{int}$ et $\mathbf{F}_{ext}$ respectivement les efforts intérieurs et extérieurs nodaux. $\mathbf{M}$, $\mathbf{F}_{int}$ et $\mathbf{F}_{ext}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{elt} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \rho \, dV \\ \mathbf{F}_{int} &= \sum_{elt} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV \\ \mathbf{F}_{ext} &= \sum_{elt} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} \, dV + \sum_{elt} \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \, dS \end{aligned} \qquad [17]$$

où $\mathbf{N}$ désigne la matrice des fonctions de base, $\mathbf{f}$ et $\mathbf{t}$ respectivement les efforts extérieurs de volume et de surface. $\sum_{elt}$ est l'opérateur d'assemblage sur les éléments, $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy. La matrice élémentaire $\mathbf{B}$ d'interpolation des déformations est telle que :

$$\left(\nabla^S \mathbf{u}\right) = \mathbf{B}\mathbf{u}_n^e \qquad [18]$$

où $\left(\nabla^S \mathbf{u}\right)$ désigne le gradient symétrisé. Le schéma d'intégration temporelle est celui des différences centrales qui permet dans les schémas explicites de calculer les déplacements, les vitesses et les accélérations, à partir de ces mêmes quantités, connues au cycle précédent. A partir de [16], la matrice de masse étant rendue diagonale (Zienkiewicz *et al.*, 1989), le calcul des vitesses et déplacements nodaux s'opère de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_n^{(i+1/2)} &= \mathbf{v}_n^{(i-1/2)} + \Delta t^{(i)} \mathbf{a}_n^{(i)} \\ \mathbf{u}_n^{(i+1)} &= \mathbf{u}_n^{(i)} + \Delta t^{(i+1/2)} \mathbf{v}_n^{(i+1/2)} \end{aligned} \qquad [19]$$

La définition des pas de temps utilisés dans les relations [19], est représentée dans la figure 6.

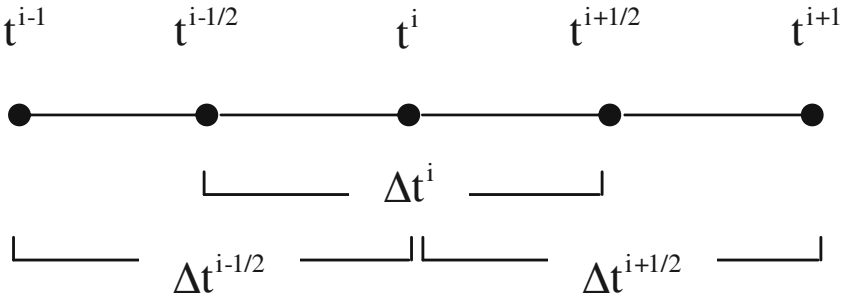


Figure 6. *Discrétisation temporelle*

4.2. *Interpolation éléments finis*

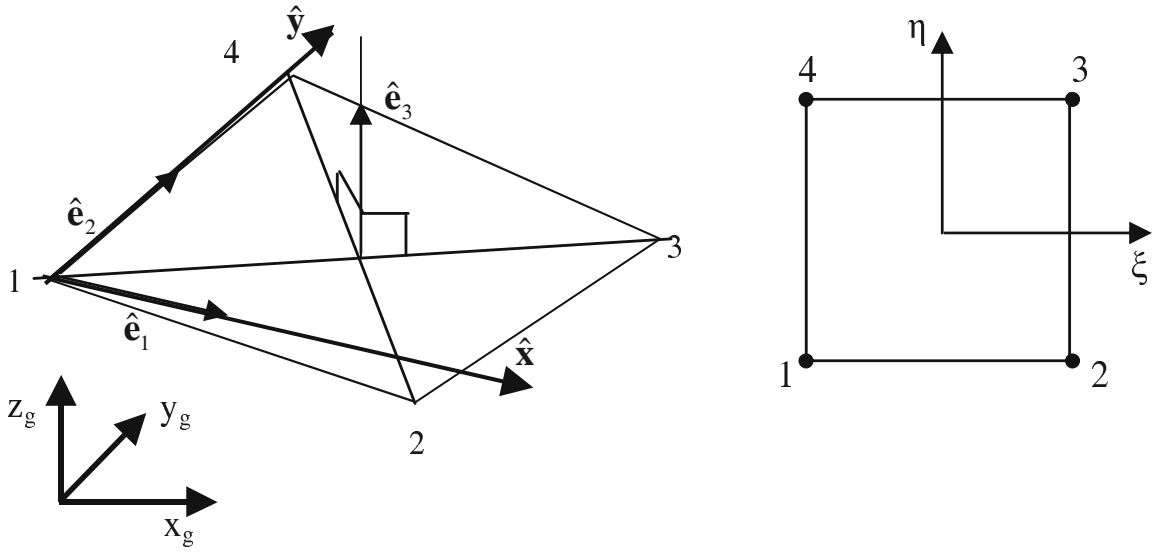


Figure 7. *Définition des repères et élément de référence à quatre nœuds associé*

Un élément fini de coque à 4 nœuds basé sur l'approche avec pincement présentée à la section 3, est construit. Cet élément est isoparamétrique. Un repère local $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ est défini en chaque élément (figure 7) de la manière suivante (Belytschko *et al.*, 1984) : $\hat{\mathbf{e}}_3$ est construit à l'aide des coordonnées nodales des sommets et tel qu'il soit perpendiculaire aux vecteurs reliant les nœuds 1-3 et 2-4, notés $\mathbf{r}_{13}$ et $\mathbf{r}_{24}$:

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{\mathbf{r}_{13} \wedge \mathbf{r}_{24}}{\left\| \mathbf{r}_{13} \wedge \mathbf{r}_{24} \right\|} \qquad [20]$$

Le vecteur $\hat{\mathbf{e}}_1$ est assujetti à l'arête entre les nœuds 1 et 2, de sorte à être orthogonal à $\hat{\mathbf{e}}_3$:

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{\mathbf{r}_{12} - (\mathbf{r}_{12} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3)\hat{\mathbf{e}}_3)}{\left\| \mathbf{r}_{12} - (\mathbf{r}_{12} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3)\hat{\mathbf{e}}_3) \right\|} \qquad [21]$$

Le troisième vecteur $\hat{\mathbf{e}}_2$ du repère est tel que $\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3 \wedge \hat{\mathbf{e}}_1$. Le degré de liberté traduisant l'écrasement dans l'épaisseur est interpolé avec les mêmes fonctions que les autres composantes de déplacement des points de la surface moyenne, soit :

$$\begin{cases} \overline{u} = N_i u_i \\ \theta = N_i \theta_i \\ \beta = N_i \beta_i \end{cases} \qquad [22]$$

où les N_i sont les fonctions d'interpolations bilinéaires classiques du quadrangle. Le vecteur élémentaire des degrés de liberté est, pour i=1 à 4 :

$$\left\{ \mathbf{u}_n^e \right\}^T = \left\{ \left\{ \mathbf{u}_1^e \right\}^T \left\{ \mathbf{u}_2^e \right\}^T \left\{ \mathbf{u}_3^e \right\}^T \left\{ \mathbf{u}_4^e \right\}^T \right\}, \quad \left\{ \mathbf{u}_i^e \right\} = \left[u_{xi} \quad u_{yi} \quad u_{zi} \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \beta_i \right] \qquad [23]$$

Dans un souci d'efficacité numérique, et de manière classique en approche explicite le quadrangle utilisé, est un élément à intégration réduite, soit avec un unique point d'intégration au centre de l'élément (en $\xi = \eta = 0$) et utilisant un contrôle des modes à énergie nulle (Flanagan *et al* 1981), (Pian *et al* 1983). Compte tenu de la dissociation en composantes (équations [14] et [15]) de membrane, flexion, cisaillement transverse, cisaillement transverse de pincement et de pincement pur, le calcul des déformations s'écrit, dans le repère local à l'élément :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \left[\mathbf{B}_i^m\right]\left\{\mathbf{u}_i^e\right\} + \left[\mathbf{B}_i^f\right]\left\{\mathbf{u}_i^e\right\}$$
$$\begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \left[\mathbf{B}_i^{ct}\right]\left\{\mathbf{u}_i^e\right\} + \left[\mathbf{B}_i^{ctp}\right]\left\{\mathbf{u}_i^e\right\} \qquad [24]$$
$$\left\{\varepsilon_{33}\right\} = \left[\mathbf{B}_i^p\right]\left\{\mathbf{u}_i^e\right\}$$

L'indice i représente le numéro du nœud dans l'élément et varie de 1 à 4. Les matrices d'interpolation des déformations de membrane $\mathbf{B}^m$, de flexion $\mathbf{B}^f$ et de cisaillement transverse $\mathbf{B}^{ct}$ sont celles de l'élément de coque classique. Les matrices d'interpolation des déformations de cisaillement transverse de pincement $\mathbf{B}_i^{ctp}$ et de pincement pur $\mathbf{B}_i^p$ sont :

$$\left[\mathbf{B}_i^{ctp}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & zB_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & zB_{2i} \end{bmatrix}$$
$$\left[\mathbf{B}_i^p\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \qquad [25]$$

avec :

$$B_{1i} = \frac{\partial N_i}{\partial x}; \quad B_{2i} = \frac{\partial N_i}{\partial y} \qquad [26]$$

REMARQUE. — Le pincement a été introduit dans un élément de Mindlin à quatre nœuds (Belytschko *et al.*, 1984), car c'est l'élément de coque le plus utilisé en calcul explicite. Ce travail, à la demande de la société EADS a été réalisé dans le logiciel industriel PAM-FORM (ESI). Il serait intéressant de voir si le pincement pourrait être introduit dans des éléments de type Kirchhoff discrets (DKT, DKQ).

4.3. *Calcul des efforts intérieurs nodaux élémentaires*

En définissant par f_i, m_i et p_i les efforts (et moments) intérieurs nodaux élémentaires associés aux 6 degrés de liberté de la formulation, le travail virtuel des efforts intérieurs élémentaires est de la forme :

$$\left(W_{int}\right)^e = \int_{V_e} \boldsymbol{\delta\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}\, dV = \int_{V_e} \boldsymbol{\delta u}_n^e \left(\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}\right) dV = \delta u_i^T f_i + \delta\theta_i^T m_i + \delta\beta_i p_i \qquad [27]$$

Après avoir calculé les composantes de contraintes, ces efforts intérieurs nodaux élémentaires nécessitent tout d'abord le calcul au seul point de Gauss, au centre de l'élément, des résultantes élémentaires. Elles sont obtenues par intégration dans l'épaisseur de l'élément soit :

$$f_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta}\, dz; \quad \text{et} \quad m_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{\alpha\beta}\, dz \qquad [28]$$

ce qui donne les résultantes intérieures élémentaires classiques de membrane, de flexion et de cisaillement transverse. Les résultantes spécifiques à la coque à pincement sont celles agissant dans l'épaisseur, c'est-à-dire de couplage cisaillement transverse de pincement $\mathbf{m}^{ctp}$ et de pincement $\mathbf{f}^{p}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{ctp} &= mp_{13}(\hat{\mathbf{e}}_1 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3 + \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_1) + mp_{23}(\hat{\mathbf{e}}_2 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3 + \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_2) \\ \mathbf{f}^{p} &= fp_{33}\hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3 \end{aligned} \qquad [29]$$

Le calcul des contraintes à partir des déformations nécessite une loi de comportement en particulier selon l'épaisseur. Dans ce travail, cette loi de compaction transverse est supposée élastique linéaire, par manque de données physiques entre σ_{33} et ε_{33}. Une perspective à ce travail sera d'étendre aux modèles proposés dans (Gutowski, 1985 ; Baoxing *et al.*, 1999) concernant les CFRTP en prenant en compte la température.

Le calcul du vecteur des efforts intérieurs nodaux élémentaires nécessite ensuite l'intégration de ces résultantes sur la surface de l'élément, noté S_e. Il possède pour chaque nœud, 6 composantes dont les cinq premières sont analogues à la formulation de l'élément de coque classique. L'ajout d'une composante de pincement fait apparaître une seule composante d'effort intérieur supplémentaire associé au degré de liberté de pincement, dont on donne l'expression ([30]) dans le cas d'une intégration réduite à un point, pour le nœud I :

$$m^{e}_{3I} = S_e\left(B_{2I} mp_{23} + B_{1I} mp_{13} + \frac{1}{4} fp_{33} \right) \qquad [30]$$

Cette composante de moment intérieur nodal supplémentaire est calculée à la fois par la résultante de pincement $\mathbf{f}^{p}$ et par les moments de couplage cisaillement transverse de pincement $\mathbf{m}^{ctp}$ ([29]). Une interprétation physique de ces composantes d'efforts nodaux élémentaires est réalisée dans (Bischoff *et al.*, 2000) dans le cas d'un modèle de coque à 7 paramètres. Le tableau 1 compare la formulation de l'élément de coque avec pincement à une approche de coque

classique, en termes de dimensions des composantes de déformation, et d'efforts nodaux, pour un élément à 4 nœuds.

	Déformations	Efforts nodaux
	$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B}\,\mathbf{u}_n^e$	$\mathbf{f}^e = \int_{S^e} \mathbf{B}^T \mathbf{f}\, dS$
Taille des matrices et vecteurs, coque classique (5 d.d.l./nœud)	(8*1)= (8*20)(20*1)	(20*1)=(20*8)(8*1)
Taille des matrices et vecteurs, coque avec pincement (6 d.d.l./nœud)	(11*1)=(11*24)(24*1)	(24*1)=(24*11)(11*1)

Tableau 1. *Taille comparative des matrices et vecteurs*

4.4. *Calcul des efforts extérieurs nodaux élémentaires*

Le théorème des travaux virtuels fait apparaître un effort extérieur agissant sur le degré de liberté de pincement. Ce travail des efforts extérieurs élémentaire s'écrit :

$$\left(W_{ext}\right)^e = \int_{V_e} \quad : \; {}_{ext}\,dV = \int_{V_e} (\delta u_i)^T \left(f_i^{ext}\right) dV \qquad [31]$$

avec :

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_i^{ext})^T &= \left[f_{xi}^{ext} \quad f_{yi}^{ext} \quad f_{zi}^{ext} \quad m_{xi}^{ext} \quad m_{yi}^{ext} \quad f_{pi}^{ext} \right] \\ (\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_i)^T &= \left[\quad {}_{xi} \quad {}_{yi} \quad {}_{zi} \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \beta_i \right] \end{aligned} \qquad [32]$$

Par rapport à la formulation classique, pour l'élément fini de coque à pincement, seul f_{pi}^{ext} est à définir. On s'intéresse donc à l'effort agissant selon la direction transverse à la coque. On note (figure 8) S_1 et S_2 les surfaces supérieure et inférieure de la coque, S_1^p et S_2^p les parties de S_1 et S_2 à effort imposé et rapportées sur la surface de référence de la coque et $S^p = S_1^p \cap S_2^p ; S' = S_2^p - S_1^p$. Dans le cas d'effort surfacique, le travail des efforts extérieurs élémentaires s'écrit :

$$(W_{ext})^e = \int_{S^P} (p_1 + p_2)(\delta u_z)\, dS^P + \int_{S^P} (p_1 - p_2)\frac{h}{2}(\delta\beta)\, dS^P + \int_{S'} p_2 \left(\delta u_z + \delta u_p(-\frac{h}{2}) \right) dS' \qquad [33]$$

Le premier terme de [33] correspond au travail des efforts extérieurs agissant sur la surface moyenne, le second correspond à la puissance extérieure des efforts impliquant le pincement. Dans le cas où $S_1^p = S_2^p$:

– si $p_1 = p_2$ la structure se déplace transversalement sans générer de pincement ;

– si $p_1 = -p_2$ la structure ne subit que du pincement, on parlera de pincement pur. Cet aspect n'est pas pris en compte dans le cas de coques classiques ;

– si $|p_1| \neq |p_2|$ les points de la surface moyenne se déplacent transversalement et la structure est également pincée dans son épaisseur. C'est le cas courant dans une mise en forme des CFRTP.

La discrétisation éléments finis nous permet d'écrire pour le terme de pincement (d'après [33]):

$$(W_{ext}^p)^e = \delta\boldsymbol{\beta}_i^{eT} \int_{S^P} \mathbf{N}^T \left(p_1 - p_2\right) \frac{h}{2} dS^P + \delta\boldsymbol{\beta}_i^{eT} \int_{S'} \mathbf{N}^T p_2 \frac{h}{2} dS' = \delta\boldsymbol{\beta}_i^{eT} \mathbf{F}_i^p \qquad [34]$$

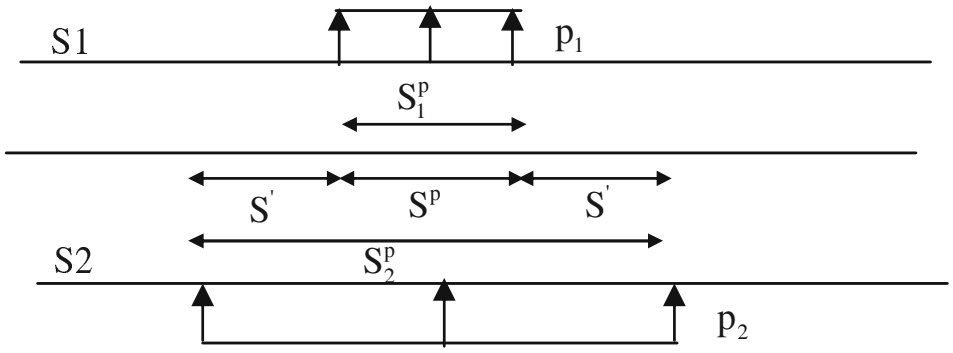


Figure 8. *Pressions agissant sur les faces de la coque*

5. Blocage en pincement et découplage de la loi de comportement

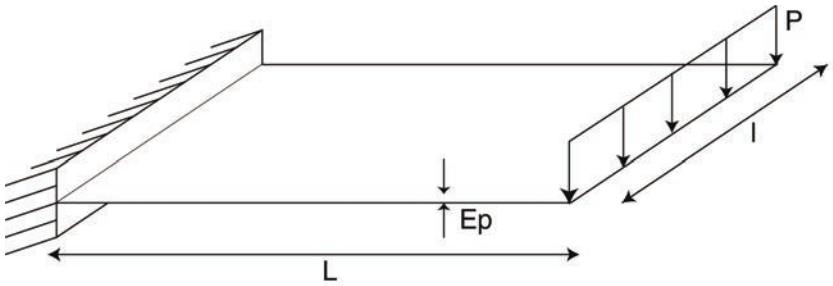


Figure 9. *Poutre console en flexion*

Flèche (m)		
Epaisseur (m)	Coque classique	Coque à pincement
0.01	0.044	0.038
0.001	0.044	0.037
0.0001	0.044	0.031

Tableau 2. *Comparaison des flèches, approche classique, coque à pincement.*

L'élément fini décrit dans la section précédente présente un blocage numérique ou verrouillage en pincement. Ce phénomène peut-être illustré sur l'exemple suivant : une poutre console (figure 9) de longueur L = 0.1 m et de largeur l = 0.01 m est encastrée à une extrémité et soumise à un effort F. Trois valeurs d'épaisseur sont utilisées Ep = 0.01, 0.001, 0.0001 m de sorte à donner des rapports longueur sur épaisseur égaux respectivement à 10, 100 et 1000. Les propriétés du matériau sont les suivantes $E = 10^7$ Pa, $\nu = 0.3$. L'effort est fonction de l'épaisseur de sorte à obtenir toujours la même flèche théorique pour les trois épaisseurs considérées : $F = 1.510^6 * (Ep)^3$. Le maillage contient 20*2 éléments. La flèche obtenue à l'extrémité de la poutre par la formulation coque à pincement est comparée dans le tableau 2 à celle obtenue par une formulation classique de coque. Ce test met en évidence le verrouillage de la coque à pincement Celui-ci est d'autant plus important que l'épaisseur diminue. La loi de comportement utilisée dans ce test, est une loi élastique tridimensionnelle complète. Le verrouillage mis en évidence sur le test ci-dessus trouve son origine dans les contraintes normales transverses apportées par la flexion. Dans le cas de l'élasticité la contrainte normale transverse est :

$$\sigma_{33} = C_{33\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + C_{3333}\varepsilon_{33}\,;\alpha,\beta = 1,2 \qquad [35]$$

En séparant les parties membranaires et de flexion des composantes de déformations [14] il vient :

$$\sigma_{33} = \left[C_{33\alpha\beta}\varepsilon^{m}_{\alpha\beta} + C_{3333}\varepsilon_{33}\right] + \left[C_{33\alpha\beta}\varepsilon^{f}_{\alpha\beta}\right] \text{ avec } \begin{Bmatrix} \varepsilon^{f}_{11} \\ \varepsilon^{f}_{22} \\ 2\varepsilon^{f}_{12} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \theta_{y,1} \\ -\theta_{x,2} \\ -\theta_{x,2} + \theta_{y,1} \end{Bmatrix} \qquad [36]$$

Si la structure est dans une configuration où la flexion est prédominante (sans pincement ce qui est le cas de l'exemple figure 8), et si l'épaisseur est faible, la contrainte normale transverse devrait tendre vers une valeur nulle. Le terme de déformation de flexion [36] conduit à un terme parasite pour cette composante de contrainte. Pour éviter ce phénomène de verrouillage, dans l'élément fini de coque présenté, la loi de comportement est modifiée de telle sorte que la flexion et le

pincement soient découplés (Simo *et al*., 1990 ; Touratier, 2000 ; Polit, 2000). La loi de comportement utilisée est donc tridimensionnelle et complète pour les composantes de membrane, de pincement et de cisaillement transverse, alors que les composantes de contraintes de flexion sont calculées à l'aide d'une loi de comportement condensée obtenue en tenant compte de l'hypothèse $\sigma_{33}^{f} = 0$. Dans le cas d'un matériau élastique isotrope, pour lequel les termes de la matrice de comportement sont :

$$\begin{aligned} C_{1111} &= C_{2222} = C_{3333} = \frac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \\ C_{1122} &= C_{1133} = C_{2233} = \frac{E\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \\ C_{1212} &= C_{1313} = C_{2323} = \frac{E}{2(1+\upsilon)} \end{aligned} \qquad [37]$$

la modification de la loi de comportement pour l'élément de coque à pincement, conduit à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & 0 & C_{1133} \\ C_{1122} & C_{2222} & 0 & C_{2233} \\ 0 & 0 & C_{1212} & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & 0 & C_{3333} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{m} \\ \varepsilon_{22}^{m} \\ \varepsilon_{12}^{m} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{1111}^{*} & C_{1122}^{*} & 0 & 0 \\ C_{1122}^{*} & C_{1111}^{*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{f} \\ \varepsilon_{22}^{f} \\ \varepsilon_{12}^{f} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad [38]$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1313} & 0 \\ 0 & C_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{13}^{ct} + \varepsilon_{13}^{ctp} \\ \varepsilon_{23}^{ct} + \varepsilon_{23}^{ctp} \end{Bmatrix}$$

en ayant posé (toujours pour un matériau élastique isotrope) :

$$\begin{aligned} C_{1111}^{*} = C_{2222}^{*} &= \frac{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}{(1-\upsilon^{2})(1-\upsilon)} * C_{1111} \\ C_{1122}^{*} &= \frac{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}{(1-\upsilon^{2})} * C_{1122} \end{aligned} \qquad [39]$$

Le même découplage peut être utilisé pour un matériau orthotrope en écrivant $\sigma_{33}^{f} = 0$. Le tableau 3 montre les résultats obtenus sur le test précédent avec l'élément avec pincement utilisant la loi de comportement découplée en flexion et pour lequel le verrouillage disparaît. Notons que d'autres formulations à 7 degrés de libertés sont utilisées dans la littérature pour lever ce verrouillage soit dans le cas d'approche mixte (Butcher *et al.*, 1994) ou dans le cas de formulation quadratique pour le déplacement transverse (Bischoff *et al.*, 1997).

Epaisseur (m)	Coque classique	Coque à pincement avec découplage	Coque à pincement loi de comportement 3D
0.01	-0.044	-0.044	0.038
0.001	-0.044	-0.044	0.037
0.0001	-0.044	-0.044	0.031

Tableau 3. *Efficacité du découplage en flexion-pincement*

6. Tests de validation de l'élément de coque à pincement

En l'absence d'un patch test spécifique aux éléments de coques à pincement, un ensemble de tests élémentaires caractéristiques de la réponse en pincement est présenté dans cette section.

6.1. *Test d'écrasement sous pression*

On cherche à mettre en évidence les couplages entre les déformations de membrane et de pincement dans l'élément proposé. Pour cela, on compare les résultats issus des calculs réalisés avec la coque à pincement avec ceux obtenus par des modèles tridimensionnels. La géométrie et les conditions aux limites des deux modèles sont précisées figure 10. Le maillage du modèle coque contient 10*10 éléments. Le modèle tridimensionnel dispose de 4 éléments dans l'épaisseur et seule la demi-épaisseur de la structure est maillée. Les données sont les suivantes, E = 120 GPa, $\nu = 0.3$, L = 50 mm, épaisseur e = 4 mm. Dans un premier temps la sollicitation est une pression normale appliquée sur les deux surfaces extérieures.

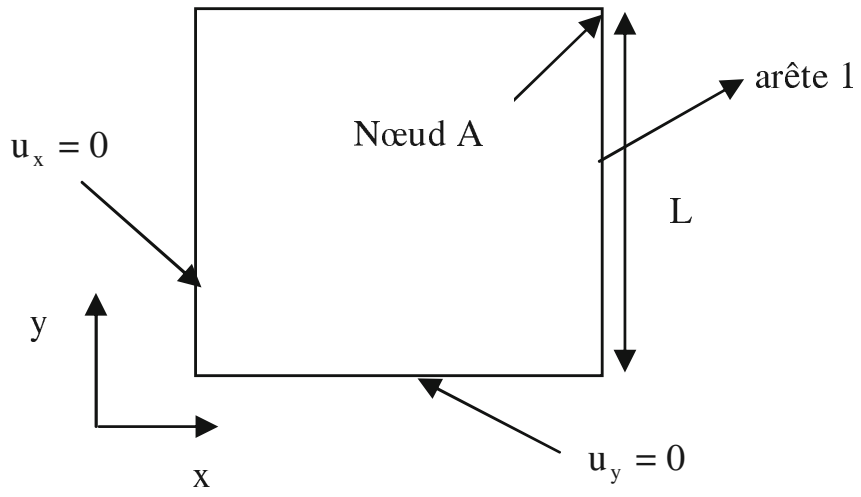


Figure 10. *Géométrie et conditions aux limites du test d'écrasement*

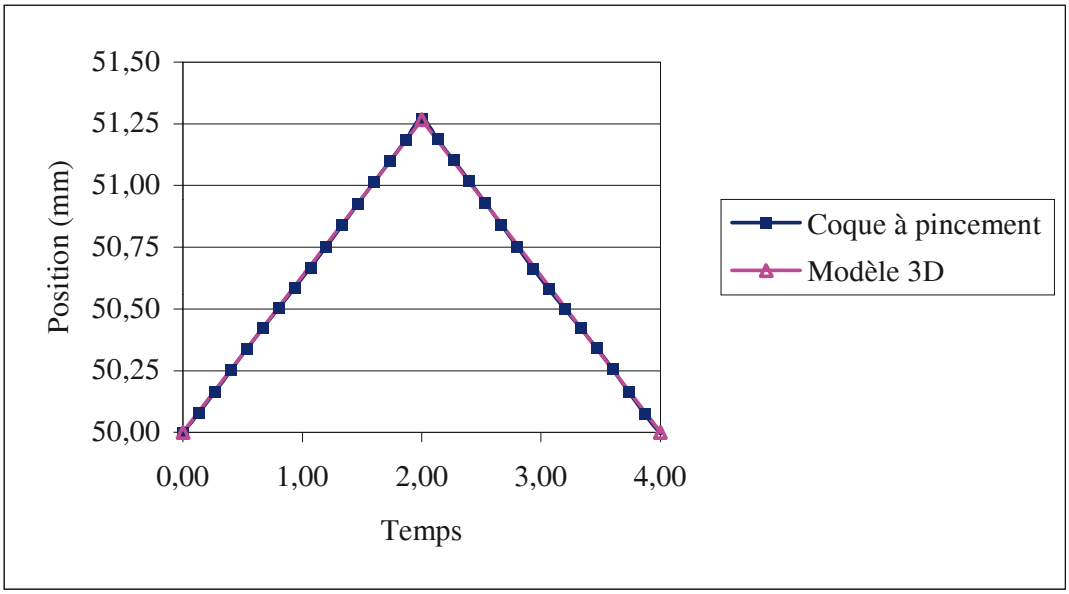


Figure 11. *Déplacement selon la direction x du nœud A*

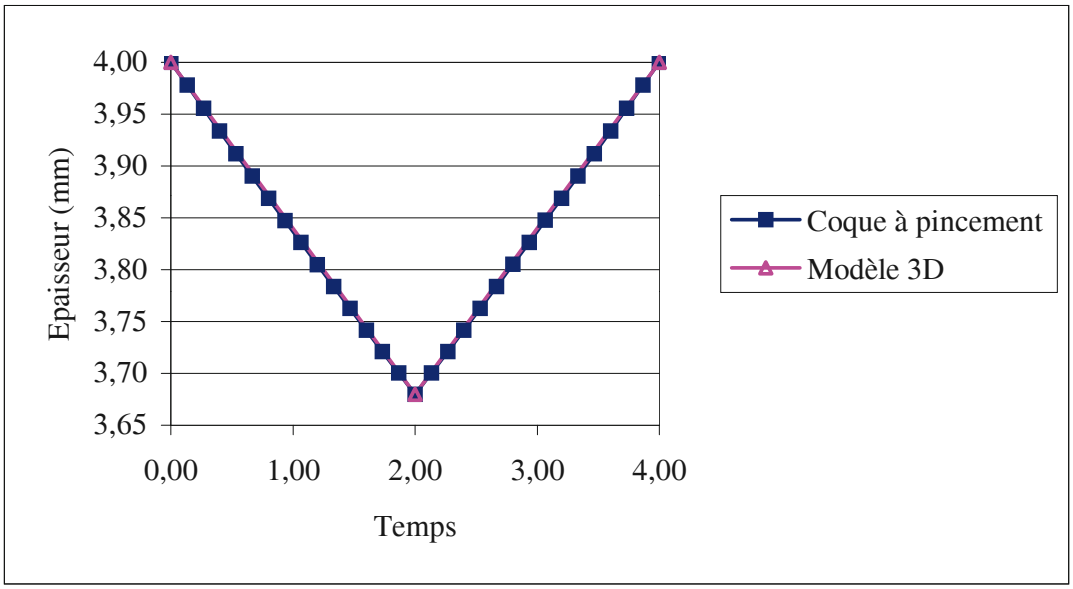


Figure 12. *Evolution de l'épaisseur*

La pression initiale est nulle, puis atteint linéairement 10 GPa pour revenir à une valeur nulle. Cette valeur est constante sur toute la surface. Le déplacement des nœuds (figure 11), les épaisseurs (figure 12) obtenus en utilisant l'élément de coque à pincement présenté sont identiques aux résultats fournis par le modèle tridimensionnel. La contrainte normale transverse est constante et égale à la pression appliquée. Le degré de liberté dans l'épaisseur permet une remise à jour de l'épaisseur. Sur la même géométrie est ensuite appliquée une pression évoluant linéairement selon la direction x (figure 13).

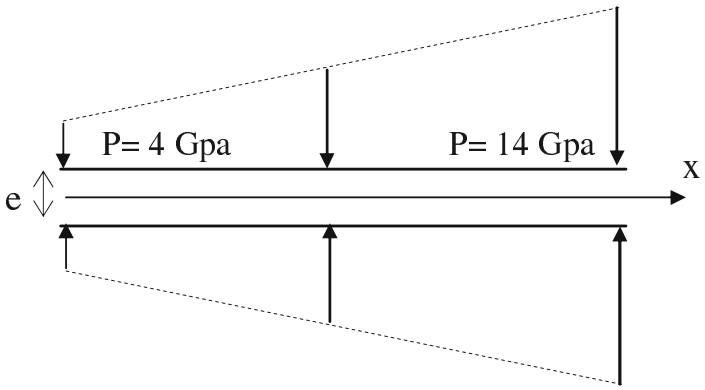


Figure 13. *Pression variable le long de x*

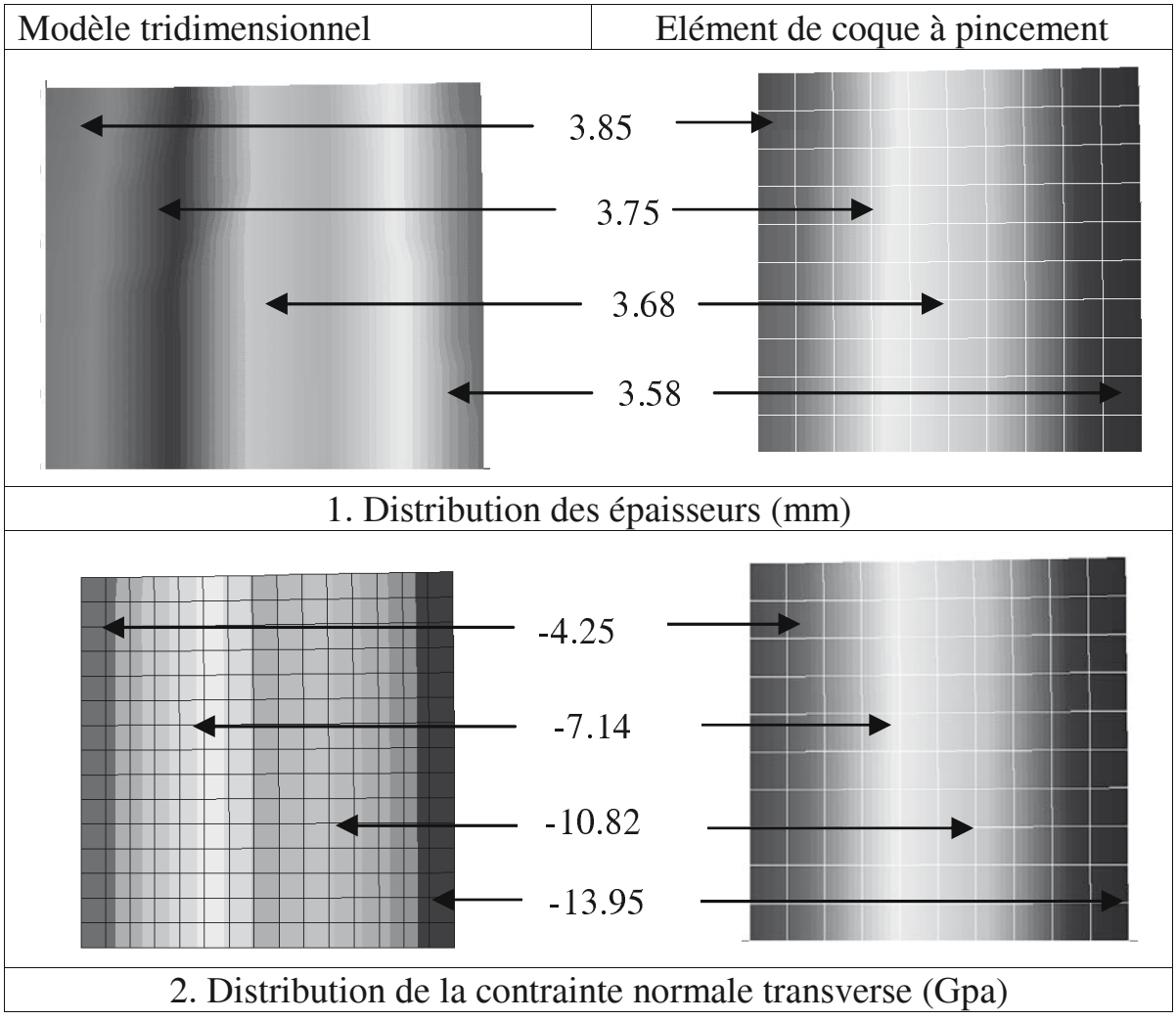


Figure 14. *Comparaison coque à pincement – tridimensionnel*

Les figures 14 (1 et 2) montrent que les résultats obtenus pour la composante de contrainte normale ainsi que pour la variation d'épaisseur sont en bonne adéquation avec ceux obtenus avec l'approche tridimensionnelle.

6.2. *Test de traction sur une plaque carrée*

Dans ce test, on s'intéresse au comportement normal transverse, lorsqu'on applique une sollicitation membranaire. La géométrie et les données matérielles sont identiques au test d'écrasement (figure 10). Une vitesse est imposée sur l'arête 1 (figure 10) du quart de la plaque carrée de façon à avoir un déplacement total de 8 mm. Le calcul de la variation de l'épaisseur est ensuite comparé pour la coque à pincement, le modèle tridimensionnel et une coque classique. Dans ce dernier cas, l'épaisseur est remise à jour après calcul de la déformation normale transverse issue de l'hypothèse de contrainte normale nulle. La figure 15 montre le profil d'épaisseur obtenu (le long de x en $y = 0$). On constate que la déformation de membrane engendre une déformation dans l'épaisseur. Celle-ci vérifie la condition aux limites à l'encastrement (pas de variation d'épaisseur) comme le modèle tridimensionnel. Contrairement à la coque classique, ces conditions aux limites sont correctement traduites par la coque à pincement.

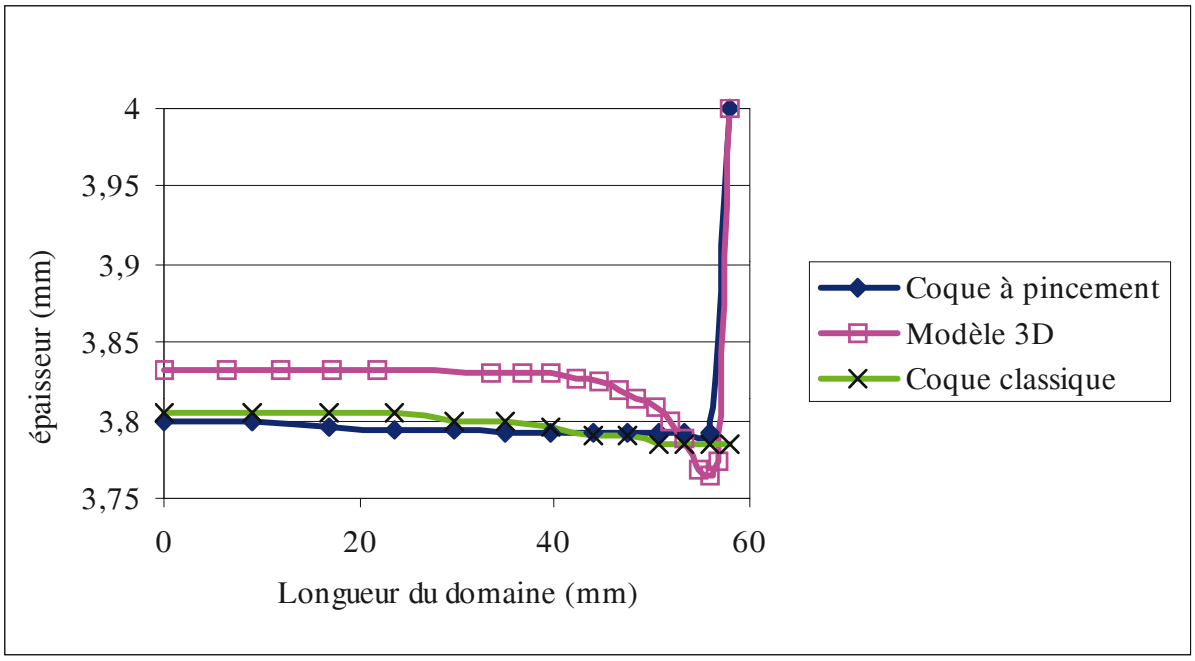


Figure 15. *Variation d'épaisseur pour les 3 modèles*

6.3. *Plaque carrée encastrée*

L'objectif de ce test est de comparer les résultats de l'élément de coque à pincement avec des solutions sur des exemples classiques notamment en statique. Ces tests ont également pour objectif de vérifier que l'approche utilisée pour pallier au verrouillage en pincement (section 5) est efficace autant en petits qu'en grands déplacements. Les comparaisons sont réalisées entre les éléments de coques classiques (les tests ne comportant pas de pincement), l'élément de coque à pincement avec une loi de comportement tridimensionnelle non découplée, et l'élément de coque à pincement avec le découplage.

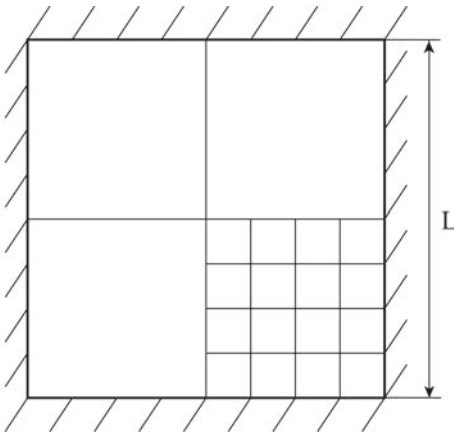


Figure 16. *Géométrie du test de la plaque carrée encastrée*

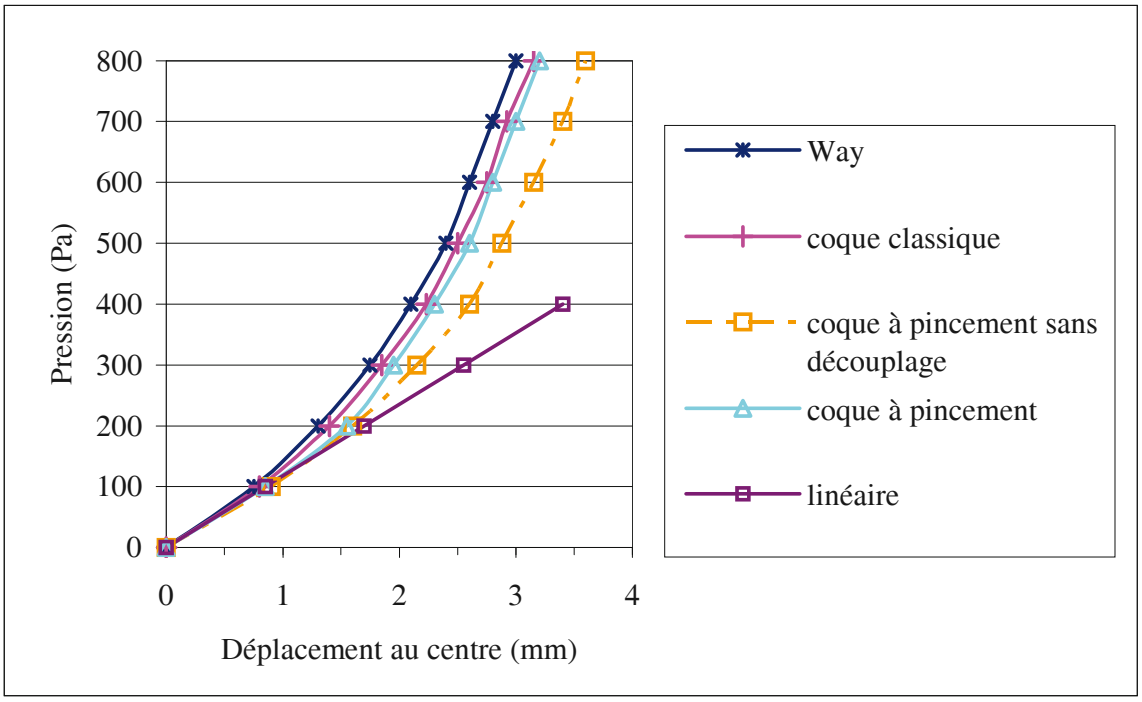


Figure 17. *Déplacement au centre de la plaque*

Une plaque carrée est encastrée sur ses quatre côtés et soumise à un chargement uniformément réparti sur sa surface ($E = 20010^9$ Pa , $\nu = 0.3$, $L = 1$ m ; $e = 2.10^{-3}$ m). Seul un quart de la plaque est étudiée (figure 16). Pour une pression de 500 Pa la flèche au nœud central de la plaque est égale à 2.5 mm (Hughes *et al.*, 1981). Pour une pression variable, on reporte sur la figure 17, les flèches obtenues par les trois approches et également la solution de référence de Way (Hughes *et al.*, 1981). On constate que la correction apportée sur le comportement en flexion permet d'obtenir des résultats satisfaisants, équivalents à ceux obtenus par une coque classique et proches de la solution de référence.

6.4. *Poutre console en grands déplacements*

Dans la même démarche que le cas précédent on cherche à confirmer que le découplage de la loi de comportement pour éviter le verrouillage est efficace lorsque le chargement imposé conduit à de grands déplacements. La géométrie de ce test décrite figure 9 (L = 0.4 m, l = 0.02 m, Ep = 0.02 m, $E = 10^9$ Pa , $\nu = 0.3$). Pour ce problème et pour un effort ponctuel de 250 N, la flèche à l'extrémité de la poutre est égale à 224 mm (Bisshopp *et al.*, 1945), soit supérieure à L/2. Pour une montée d'effort comprise entre 0 et 250 N, on représente sur la figure 18, la flèche obtenue par les 3 modèles. Pour un effort égal à 250 N la flèche calculée à l'extrémité libre est en bonne adéquation avec la solution de référence. Comme dans le test précédent on constate que le découplage de la loi de comportement permet d'obtenir des résultats équivalents à ceux obtenus par l'élément de coque classique, contrairement à l'élément de coque utilisant une loi de comportement tridimensionnelle.

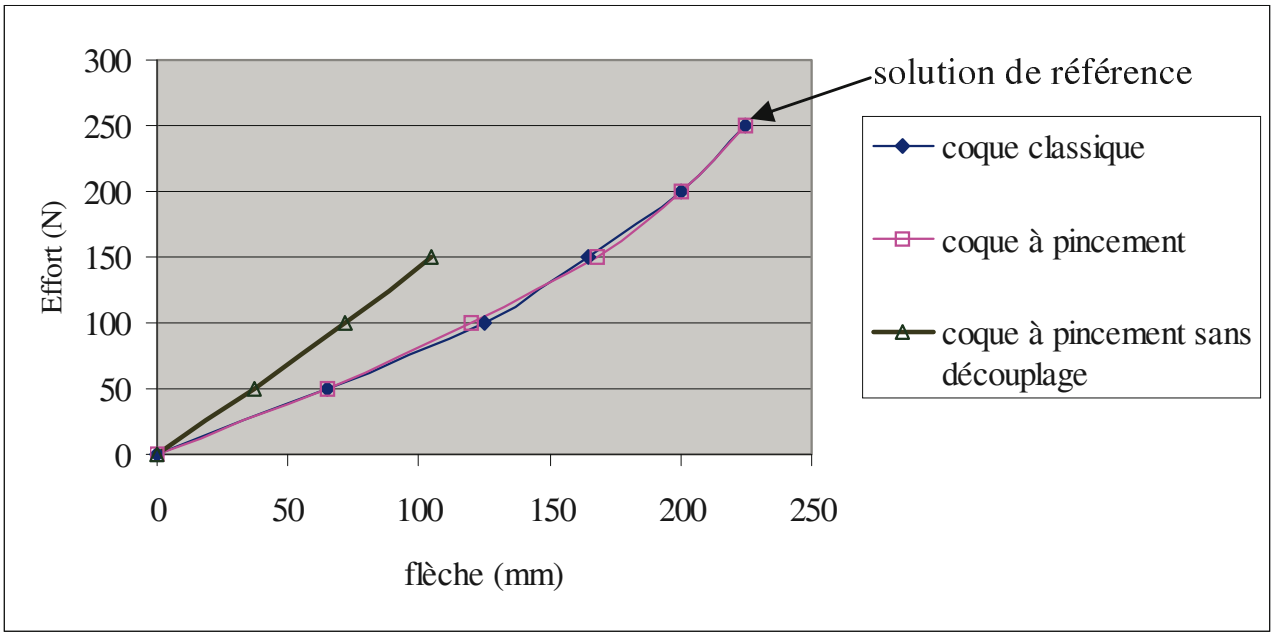


Figure 18. *Comparaison des différents modèles. Poutre console*

Les tests élémentaires présentés permettent ainsi de valider l'élément fini de coque à pincement dans un contexte en dynamique explicite et plus particulièrement pour le calcul de la contrainte normale transverse. Ces tests ont montré la nécessité du découplage (flexion-pincement) de la loi de comportement afin de retrouver des résultats en bonne adéquation avec des solutions de référence. L'objectif du développement de cet élément est désormais de l'utiliser dans un contexte de simulation des procédés de mise en forme et plus spécifiquement pour l'étape de reconsolidation, rappelée à la section 2. Dans ce cas la composante de l'effort extérieur exercé sur le degré de liberté de pincement est l'effort de contact du flan pincé soit entre les outils ou entre les autres plis. Dans ces situations on s'intéresse

alors à l'évolution au cours du procédé de la composante de contrainte normale au pli, comme indicateur de la reconsolidation et la résorption des porosités.

7. Formage et reconsolidation d'une pièce de section en Z

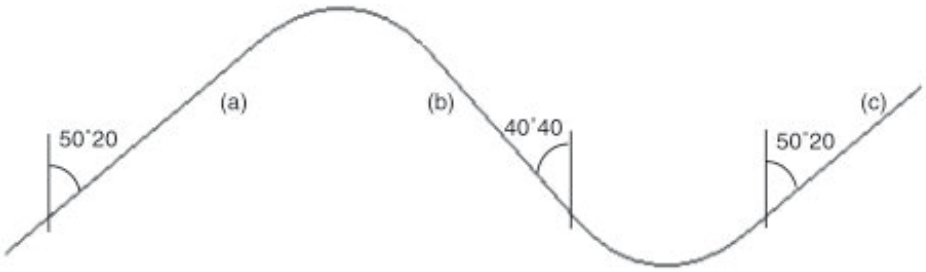


Figure 19. *Angle d'inclinaison de la section en forme de Z*

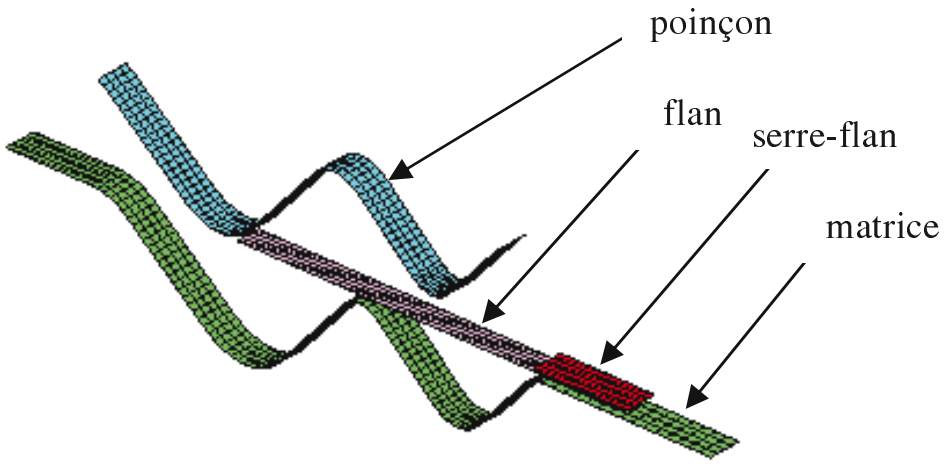


Figure 20. *Maillage à l'état initial*

Ce test consiste à simuler la mise en forme d'une pièce à géométrie suivant une section en forme de Z, représentée sur la figure 19. Initialement, le flan est plat et positionné sur la matrice comme le montre la figure 20 qui représente le maillage initial. Pour positionner le flan un serre flan est utilisé sur le bord de la pièce, sur lequel un effort de 8 KN est appliqué tout au long du processus. Le déplacement du poinçon est montré figure 21. On considère que la phase de formage est terminée quand la distance poinçon matrice atteint 1.35 mm, ce qui correspond à l'instant t = 1.6 ms. Ensuite, a lieu la phase de reconsolidation, c'est à dire de compression entre la matrice et le poinçon. On représente à la figure 22, les états de la composante de contrainte normale selon l'épaisseur en cours et à la fin de l'étape de formage. On constate, en cours de formage que cette contrainte est proche d'une valeur nulle dans l'ensemble de la pièce, hormis dans les parties courbes ; ceci est en bonne corrélation avec les micrographies réalisées lors des essais. Ceux-ci ont

montré que la consolidation commence dans les rayons de courbure (Cheruet, 2001), (Cheruet *et al.*, 2002). En fin de formage, la contrainte reste proche d'une valeur nulle dans les parties droites et elle est négative (compression) dans les parties courbes.

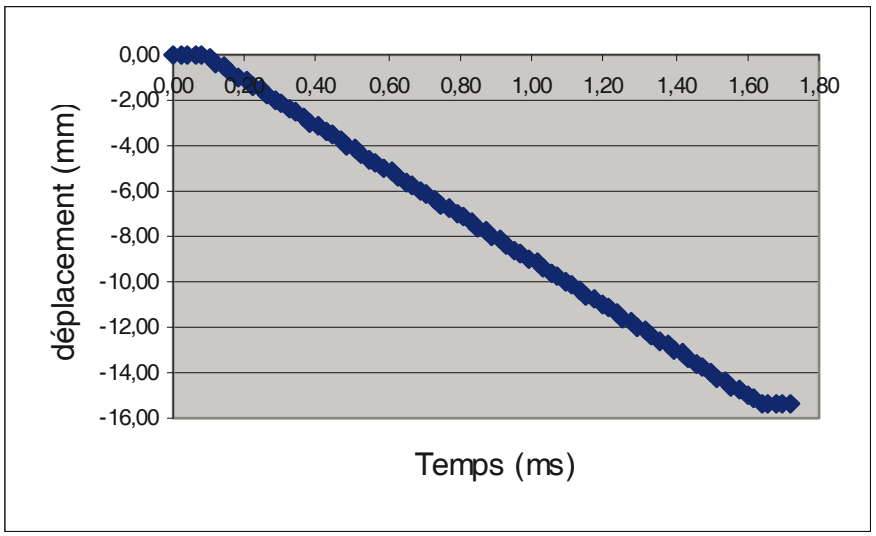


Figure 21. *Déplacement du poinçon au cours du procédé*

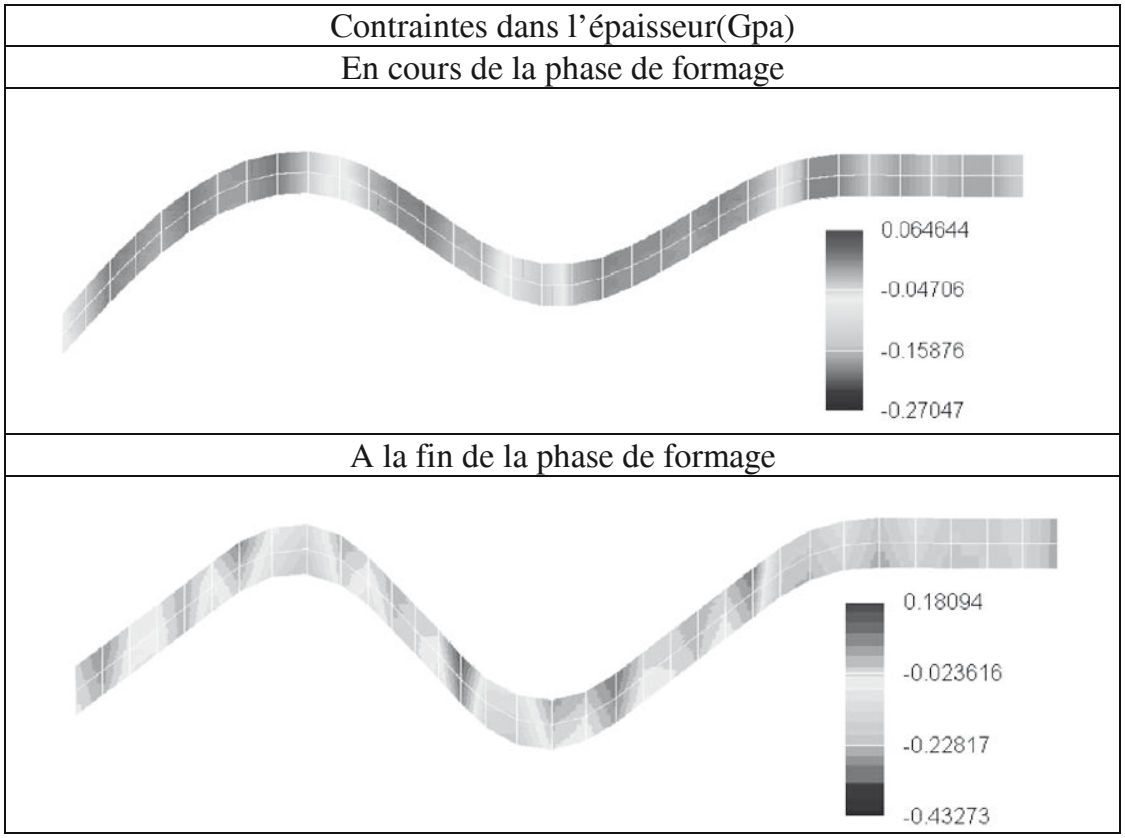


Figure 22. *Composante de contrainte dans l'épaisseur lors de la phase de mise en forme*

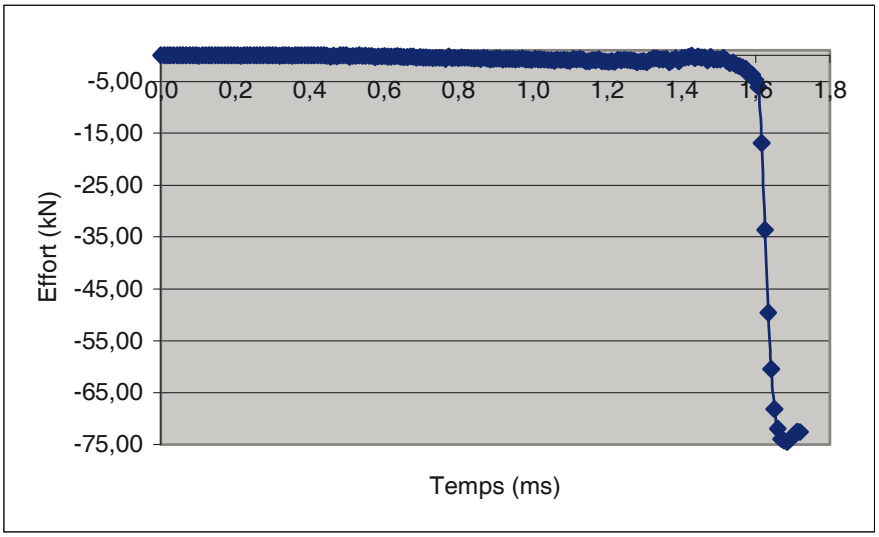


Figure 23. *Effort de contact lors du processus*

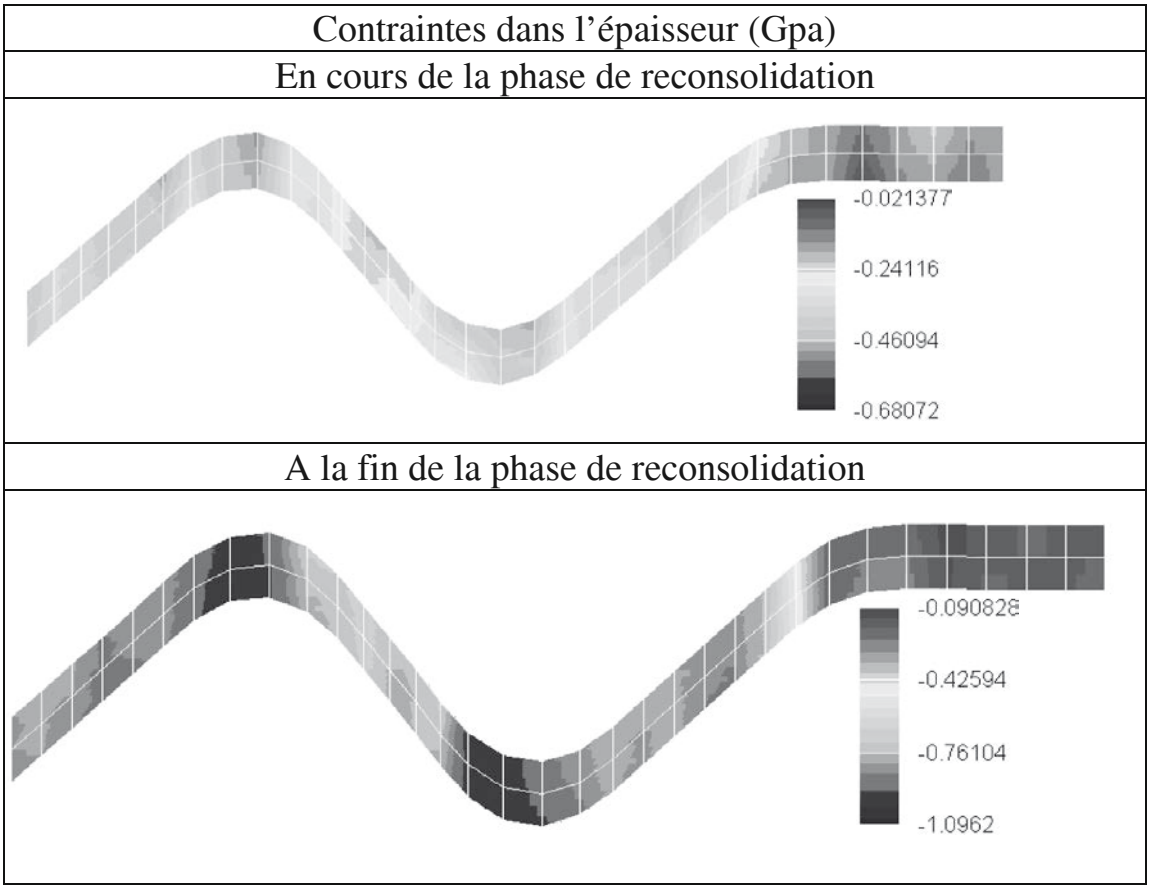


Figure 24. *Composante de contrainte dans l'épaisseur lors de la phase de reconsolidation*

Lors de la phase de reconsolidation, l'effort de contact entre le flan et les outils augmente (en valeur absolue) de façon importante, comparativement à la phase de formage (figure 23); la contrainte dans l'épaisseur par conséquent augmente

(figure 24). Pendant cette phase tout le flan est en compression et la contrainte dans l'épaisseur devient suffisamment importante pour refermer les porosités des parties droites en bonne adéquation avec les constatations expérimentales. Notons que la contrainte calculée est moins importante dans la partie la plus inclinée (zone b) et par rapport à la zone a et dans un rapport cohérent avec les angles d'inclinaison (figure 19). Ce test montre, en bon accord avec les expériences réalisées, que la composante de la contrainte dans l'épaisseur est un bon indicateur de l'évolution des porosités présentes dans le flan après l'étape de chauffage. Lors de la phase de formage, cette composante de contrainte est quasi nulle dans les zones planes et les défauts ne sont pas résorbés, contrairement aux zones courbes, où les contraintes normales induites par la géométrie conduit à la reconsolidation. Il est important que le procédé comporte une phase de reconsolidation efficace. L'élément fini utilisé est un outil efficace pour calculer la contrainte normale transverse au cours de l'ensemble du procédé de mise en forme des CFRTP.

8. Conclusions et perspectives

Ce travail s'inscrit dans un objectif de disposer d'un outil complet de la simulation de la mise en forme des composites à fibres continues et matrice thermoplastique allant jusqu'au terme de la phase d'application de pression et permettant la prédiction de la qualité finale du produit. Pour cela ce travail s'appuie sur les résultats et l'analyse de l'étude expérimentale portant sur les mécanismes liés à la reconsolidation du laminé qui montre que la phase d'application de pression est nécessaire afin de résorber toutes les porosités et que cette phase doit assurer la santé matière du produit. Pour simuler l'ensemble du procédé et donc la phase de consolidation, un élément fini de coque intégrant le calcul de la composante de contrainte transverse selon l'épaisseur est proposé. Il s'appuie sur les 5 degrés de libertés classiques des éléments finis de coque auquel est associé un degré de liberté complémentaire de pincement en chaque nœud. Le verrouillage en pincement est évité par un découplage de la flexion et du pincement dans la matrice de comportement. Un ensemble de tests élémentaires conduit à des résultats satisfaisants et valident cet élément notamment vis-à-vis du calcul de la composante de contrainte transverse selon l'épaisseur. La simulation de la mise en forme et de l'étape de reconsolidation d'une lisse à section en forme de Z, à l'aide de cet élément conduit à des résultats en bon accord avec les constatations expérimentales. A ce stade de développement la loi d'écrasement utilisée est élastique, par manque de modèles d'écrasement plus physique entre σ_{33} et ε_{33}. Des travaux réalisés pour différentes applications (Gutowski, 1985 ; Baoxing *et al.*, 1999) pourraient servir de base à une extension au comportement transverse des CFRTP, en prenant en compte la température.

Remerciements

Les auteurs remercient la société EADS pour son soutien ainsi que ses contacts S. Maison Le Poec et E. Soccard lors de cette coopération.

9. Bibliographie

Baoxing C., Chou T.W., "Compaction of woven-fabric preforms in liquid composite molding processes : single layer deformation", *Composite Science and Technology*, vol. 59, 1999, p. 1519-1526.

Belytschko T, Lin J., Tsay C., "Explicit algorithms for the non linear dynamics of shells", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 42, 1984, p. 225-251.

Bischoff M., Ramm E., «Shear deformable shell elements for large strains and rotations», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, p. 4427-4449, 1997.

Bischoff M., Ramm E., "On the physical significance of high order kinematic and static variables in a three-dimensional shell formulation", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, 2000, p. 6933-6960.

Bisshopp K.E., Drucker C.D., "Large deflections of cantilever beams", *Quaterly of Applied Mathematics*, vol. 3, 1945, p. 272.

Bletzinger K.U., Bischoff M., Ramm E., "A unified approach for shear-locking- free triangular shell finite elements", *Computer and structures*, vol. 75, 2000, p. 321-334.

Butcher N., Ramm E., Roehl D., "Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, 1994, p. 2551-2568.

Cheruet A., Analyse et simulation de la mise en forme des composites thermoplastiques, Thèse de l'Université d'Orléans, 2001.

Cheruet A., Soulat D., Boisse P., Soccard E., Maison-le Poec S., "Analysis of the interply porosities in thermoplastic composites forming processes", *International Journal of Forming Processes*, vol. 5, n° 2-3-4, 2002, p. 247-258.

Cogswell F.N., Leach D.C., "Thermoplastic structural composites in service", *Plastic, Rubber and Composites Processing and Applications*, vol. 18, 1992, p. 249-254.

Coquery M.H., Modélisation d'un joint de culasse multifeuille, Thèse de l'ENSAM PARIS, 1999.

De Luca P., Lefebvre P., Pickett A.K., "Numerical and experimental investigation of some press forming parameters of two fibre reinforced thermoplastics: APC-AS4 and PEI-CETEX", *Fourth international conference on flow processes in composites*, Aberyswyth, Wales, 1996.

Flanagan D.P., Belytschko T., "A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, 1981, p. 679-706.

Galbraith P.C., Fin M.I., “Evaluation of an LS Dyna model for deep drawing of aluminium sheet”, *Proceedings of F.E. simulations of 3D sheet metal forming processes in automotive industry*, Zurich, 1991.

Guo Y. Q., Batoz J. L., Naceur H., Bouabdallah S., Mercier F., Barlet O., “Recent developments on the analysis and optimum design of sheet metal forming parts using a simplified inverse approach”, *Computers & Structures*, vol. 78, Issues 1-3, 2000, p. 133-148.

Gutowski TG., “A resin flow/fiber deformation model for composites”, *SAMPE Quart.*, vol. 164, n° 4, 1985, p. 58-64.

Hughes T.J.R., Liu W.K., “Nonlinear finite element analysis. Part 1: Three dimensional shells”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 26, 1981, p. 331-362.

Krebs J., Friedrich K., “A direct comparison of matched-die versus diaphragm forming”, *Composites Part A*, vol. 29A, 1998, p. 183-188.

Lee W., Springer G., “A model of the manufacturing process of thermoplastic matrix composites”, *Journal of Composite Materials*, vol. 21, 1987, p 1017-1055.

Maison S., Thibout C., Garrigues C., Garcin J.L., Payen H., Sibois H., Coiffier C., Vautey P., “Technical developments in thermoplastic composites fuselages”, *SAMPE Journal*, vol. 34, n° 5, 1998, p. 33-39.

Makinouchi A., Nakamachi E., Onate E., Wagoner R.H., Editors, *Numisheet ‘93, Numerical simulation of 3D sheet metal forming processes - Verification of simulation with experiments*, Japan, 1993.

Murtagh A.M., Monaghan M.R., Mallon P.J., “Investigation of the interply slip process in continuous fiber thermoplastic composites”, *Proceedings of ICCM9*, Madrid, Juillet 1993.

Philips R., Akyuz D.A., Manson J.A.E., “Prediction of the consolidation of woven fibre reinforced thermoplastic composite: isothermal case”, *Composite Part A*, vol. 29A, 1998 p. 395-402.

Pian T.H., Chen D., “On the suppression of zero energy deformation modes”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, 1983, p. 1741-1752.

Polit O., Eléments finis en calcul de structures et application aux multicouches, Thèse d’habilitation à diriger les recherches, ENSAM Paris, 2000.

Pora J., “Composite Materials in the Airbus A380- From History to Future”, *Proceedings of ICCM13*, Plenary lecture, CD-ROM, 2001.

Rojek J., Onate E., “Sheet Spingback analysis using a simple shell triangle with translational degrees of freedom only”, *International Journal of Forming Process*, vol. 1, n° 3, 1998 p. 275-296.

Simo J.C., Rifai M.S., Fox D., “On a stress resultant geometrically exact shell model, Part 4 : Variable thickness shells with through-the-thickness stretching”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 72, 1990, p. 267-304.

Stasik M.C., Wagoner R.H., “Forming of taylor-welded aluminium blanks”, *International Journal of Forming Process*, vol. 1, n° 1, 1998, p. 9-33.

Stockes V.K., “Thermoplastics as engineering materials: The mechanics, materials, design, processing links”, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 117, 1995, p. 448-455.

Touratier M., Maîtrise des déformations à froid et à chaud dans les moteurs à combustion interne, LMSP-RENAULT Report, 2000.

Wagoner R.H., Chenot J.L., *Metal Forming Analysis*, Cambridge University Press, 390 pages, 2001.

Wang N.M., Tang S.C., “Analysis of bending effects in sheet forming”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 25, 1988, p. 255-267.

Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The finite element method,* 4th Edition, Vol. 1: Basic formulation and linear problems, Mc Graw-Hill, U.K., 1989.