

Sur une extension naturelle des équations de Maxwell dans le vide

On a natural extension of Maxwell's equations in vacuum

Auteur(s) : Christian PREZIOSA

Catégorie : Sciences fondamentales > Physique

ScienceLib Editions Mersenne : 2015 Volume 7 , N ° 151102  
ISSN 2111-4706

Publié le: 2015-11-26

# Sur une extension naturelle des équations de Maxwell dans le vide

## On a natural extension of Maxwell's equations in vacuum

**Christian PREZIOSA**  
Docteur – Ingénieur E.S.B.  
christian.preziosa@gmx.fr

**Mots clefs :** *électromagnétisme, équations de Maxwell, non-linéarité, tenseur dual.*  
**Keywords:** *electromagnetism, Maxwell equations, nonlinearity, dual tensor.*

### 1 – Introduction

Le 25 novembre 1924, le physicien Louis de Broglie soutenait une thèse dont voici un extrait :

*« ... Mais il faudrait d'abord constituer une théorie électromagnétique nouvelle conforme naturellement au principe de Relativité, rendant compte de la structure discontinue de l'énergie radiante et de la nature physique des ondes de phase, laissant enfin à la théorie de Maxwell-Lorentz un caractère d'approximation statistique qui expliquerait la légitimité de son emploi et l'exactitude de ses prévisions dans un très grand nombre de cas ... »*

Notre objectif est de montrer la possibilité d'une extension des équations de Maxwell dans le vide suivant la direction de recherche émise par le grand physicien. Dans cette étude, à la différence de la théorie classique, l'onde électromagnétique n'est pas nécessairement plane, c'est-à-dire que son amplitude peut varier dans un plan transverse à sa direction de propagation. Cette disposition est importante car elle admet une possible représentation physique des corpuscules de lumière comme pics d'amplitude de l'onde. Toutefois, en raison d'une infinité de solutions possibles, la théorie reste imprédictible physiquement, ce qui confirme, du moins dans le cas d'un espace exempt de matière, le caractère d'approximation statistique de la théorie de Maxwell-Lorentz évoqué par Louis de Broglie.

---

(\*) The following is an excerpt from the thesis of the physicist Louis de Broglie which he successfully defended on 25 November 1924 (a translation by: A. F. Kracklauer):

“... First, however, a reformulation of electrodynamics, which is in accord with relativity of course, and which accommodates discontinuous radiant energy and phase waves leaving the Maxwell-Lorentz formulation as a statistical approximation well able to account accurately for a large number of phenomena, must be found. ...”

Our goal is to show the possibility of having an extension of Maxwell's equations in vacuum following the research direction established by the great physicist. In this study, in contrast to the classical theory, the electromagnetic wave is not necessarily planar. This means that its amplitude may vary within a plane transverse to its direction of propagation. This disposition is important because it admits a possible physical representation of light particles as amplitude peaks of the wave. However, due to an infinite number of possible solutions, the theory remains unpredictable physically, which confirms, at least in the case of vacuum, the statistical approximation character of Maxwell-Lorentz formulation, as mentioned by Louis de Broglie.

### 2 – Equations de Maxwell dans le vide et solution onde plane progressive

Suivant le système d'unités de Heaviside-Lorentz (constante diélectrique  $\epsilon_0 =$  perméabilité du vide  $\mu_0 =$  célérité de la lumière  $C=1$ ), les équations de Maxwell reliant les vecteurs champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$ , sans charge  $\rho$ , ni courant  $\vec{j}$ , s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{(a)} : \quad \overline{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0} & \text{(c)} : \quad \overline{\text{rot}} \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{j} = \vec{0} \\ \text{(b)} : \quad \text{div} \vec{B} &= 0 & \text{(d)} : \quad \text{div} \vec{E} &= \rho = 0 \end{aligned}$$

Nous cherchons une solution de type onde plane progressive de direction de propagation constante  $\vec{n}$  en posant  $\vec{B} = \vec{B}(u)$  et  $\vec{E} = \vec{E}(u)$  avec  $u = \vec{n} \cdot \vec{x} - t$  et  $n^2 = 1$  :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \Rightarrow \frac{d(\vec{n} \wedge \vec{E} - \vec{B})}{du} &= \vec{0} & \text{(c)} \Rightarrow \frac{d(\vec{n} \wedge \vec{B} + \vec{E})}{du} &= \vec{0} \\ \text{(b)} \Rightarrow \frac{d(\vec{n} \cdot \vec{B})}{du} &= 0 & \text{(d)} \Rightarrow \frac{d(\vec{n} \cdot \vec{E})}{du} &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui entraîne :

$$\vec{B} = \vec{n} \wedge \vec{E} \text{ et } \vec{E} = -\vec{n} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \text{ et } E^2 = B^2.$$

Par ailleurs, utilisant successivement (a), (d), (c), il vient :

$$\overline{\text{rot}} \left( \overline{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\Delta \vec{E} + \frac{\partial \overline{\text{rot}} \vec{B}}{\partial t} = -\Delta \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \square \vec{E} = \vec{0}$$

Puis, de la même façon avec (c), (b), (a) :  $\square \vec{B} = \vec{0}$

Ces équations sont vérifiées par toute onde plane progressive. Ainsi, puisque toute configuration peut être ramenée à une somme de sinusoïdes par la transformée de Fourier, l'onde plane monochromatique constitue la solution la plus simple des équations de Maxwell dans le vide.

Cependant, une composition d'ondes planes monochromatiques de même direction de propagation est incompatible avec une description du quantum lumineux en tant que singularité du champ électromagnétique comme le sous-entend Louis de Broglie dans sa thèse. En effet, la configuration plane même de l'onde résultante réfute à priori toute localisation de l'énergie. Notre but est de chercher s'il existe une extension naturelle des équations de Maxwell, satisfaisant aux solutions de celles-ci, qui puisse rendre compte du quantum lumineux sous forme d'un pic d'amplitude de l'onde porteuse dans un plan orthogonal à sa direction de propagation.

### 3 – Equations de Maxwell avec charge et courant sous forme tensorielle

Il convient pour la suite d'exprimer les formules en se référant à l'espace-temps de Minkowski de signature (+1,-1,-1,-1).

Posons :

$$\varphi^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Sous forme tensorielle, les équations de Maxwell avec charge et courant s'écrivent :

$$(c) \text{ et } (d) \Leftrightarrow \boxed{\Phi_{,j}^{ij} = j^j} \quad (e) \quad (a) \text{ et } (b) \Leftrightarrow \boxed{\Phi_{ij,k} + \Phi_{jk,i} + \Phi_{k,j,i} = 0} \quad (f)$$

$$\text{Avec } j^j = \begin{bmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{bmatrix}$$

#### 4 – Tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique

Si  $T_i^j$  désigne le tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique et  $j^j \cdot \Phi_{ij}$  la densité volumique de force de Lorentz, nous avons :

$$T_{i,j}^j = j^j \cdot \Phi_{ij} = \Phi_{,k}^{jk} \cdot \Phi_{ij} = -(\Phi_{ij} \cdot \Phi^{kj})_{,k} + \Phi_{ij,k} \cdot \Phi^{kj} = -(\Phi_{ik} \cdot \Phi^{jk})_{,j} - \Phi_{ij,k} \cdot \Phi^{jk}$$

D'après (f) :

$$-\Phi_{ij,k} \cdot \Phi^{jk} = (\Phi_{jk,i} + \Phi_{ki,j}) \cdot \Phi^{jk} = \left(\frac{1}{2} \Phi^2 \cdot \delta_i^j\right)_{,j} + \Phi_{ki,j} \cdot \Phi^{jk} = \left(\frac{1}{2} \Phi^2 \cdot \delta_i^j\right)_{,j} + \Phi_{ij,k} \cdot \Phi^{jk} \quad \text{avec } \Phi^2 = \Phi_{ij} \cdot \Phi^{ij}$$

Par suite :

$$-\Phi_{ij,k} \cdot \Phi^{jk} = \left(\frac{1}{4} \Phi^2 \cdot \delta_i^j\right)_{,j}$$

$$\text{Et : } T_{i,j}^j = \left(\frac{1}{4} \Phi^2 \cdot \delta_i^j - \Phi_{ik} \cdot \Phi^{jk}\right)_{,j}$$

$$\text{D'où : } \boxed{T_i^j = \frac{1}{4} \Phi^2 \cdot \delta_i^j - \Phi_{ik} \cdot \Phi^{jk}} \quad (g)$$

Remarquons que ce tenseur est symétrique et de trace nulle.

#### 5 – Tenseur adjoint (dual) du champ électromagnétique

Nous introduisons le tenseur  $\hat{\Phi}_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk1} \cdot \Phi^{k1}$  dual du tenseur champ électromagnétique (tenseur adjoint à  $\Phi_{ij}$ ), où  $\epsilon_{ijk1}$  désigne le tenseur de Lévi-Civita. Nous obtenons :

$$\hat{\Phi}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix}$$

Remarquons que  $\hat{\varphi}_{ij}$  s'obtient en faisant la substitution  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$  et  $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$  (substitution duale) dans  $\hat{\varphi}_{ij}$ . Cette substitution laisse les équations de Maxwell invariantes lorsque  $j^i$  est nul.

Notons que :

$$\hat{\varphi}_{ij} = \varphi_{ij}$$

Par ailleurs :

$$\boxed{\varphi^{kj} \cdot \hat{\varphi}_{ik} = \vec{E} \cdot \vec{B} \cdot \delta_i^j \Rightarrow \varphi^{ij} \cdot \hat{\varphi}_{ij} = -4\vec{E} \cdot \vec{B}} \quad (\text{h1 et h2})$$

Et, par substitution duale :

$$\varphi^2 = 2(B^2 - E^2) \Rightarrow \boxed{\hat{\varphi}^2 = 2(E^2 - B^2) = -\varphi^2} \quad (\text{h3})$$

### 6 – Divergence généralisée du tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique

Au paragraphe 4, nous avons égalé la divergence du tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique à la densité de force de Lorentz, ce qui nous a permis, eu égard à l'équation de Maxwell (f), d'obtenir l'expression de ce tenseur.

Nous allons ci-après opérer dans le sens contraire, en calculant la divergence de ce tenseur à partir de l'expression obtenue de celui-ci, tenant compte seulement du caractère antisymétrique du tenseur champ électromagnétique.

Nous avons :

$$\left(\frac{1}{4} \varphi^2 \cdot \delta_i^j\right)_{,j} = \frac{1}{2} \varphi_{jk,i} \cdot \varphi^{jk} \quad (*)$$

$$\left(-\varphi_{ik} \cdot \varphi^{jk}\right)_{,j} = -\varphi_{ik,j} \cdot \varphi^{jk} - \varphi_{ik} \cdot \varphi_{,j}^{jk} \quad (**)$$

Or :

$$-\varphi_{ik,j} \cdot \varphi^{jk} = \varphi_{ki,j} \cdot \varphi^{jk} = \varphi_{ji,k} \cdot \varphi^{kj} = -\varphi_{ij,k} \cdot \varphi^{kj} = \varphi_{ij,k} \cdot \varphi^{jk} = \frac{1}{2} (\varphi_{ij,k} + \varphi_{ki,j}) \cdot \varphi^{jk}$$

Car :

$$\varphi_{ki,j} \cdot \varphi^{jk} = -\varphi_{ik,j} \cdot \varphi^{jk} = \varphi_{ik,j} \cdot \varphi^{kj} = \varphi_{ij,k} \cdot \varphi^{jk}$$

Et :

$$-\varphi_{ik} \cdot \varphi_{,j}^{jk} = -\varphi_{ij} \cdot \varphi_{,k}^{kj} = \varphi_{,k}^{jk} \cdot \varphi_{ij}$$

D'où l'identité suivante par sommation des termes (\*) et (\*\*):

$$\boxed{\left(\frac{1}{4} \varphi^2 \cdot \delta_i^j - \varphi_{ik} \cdot \varphi^{jk}\right)_{,j} = \varphi_{,k}^{jk} \cdot \varphi_{ij} + \frac{1}{2} (\varphi_{ij,k} + \varphi_{jk,i} + \varphi_{ki,j}) \cdot \varphi^{jk}} \quad (\text{i})$$

Cette identité s'exprime aussi en fonction du tenseur électromagnétique et de son adjoint. En effet :

$$\varphi_{ik} \cdot \varphi^{jk} = -\frac{1}{4} \varepsilon^{pqjk} \cdot \varepsilon_{rsik} \cdot \hat{\varphi}_{pq} \cdot \hat{\varphi}^{rs} \quad (\text{le signe } - \text{ résulte de } |\delta_i^j| = -1)$$

Avec :

$$\varepsilon^{pqjk} \cdot \varepsilon_{rsik} = \begin{vmatrix} \delta_r^p & \delta_s^p & \delta_i^p \\ \delta_r^q & \delta_s^q & \delta_i^q \\ \delta_r^j & \delta_s^j & \delta_i^j \end{vmatrix} = \delta_r^p \cdot \delta_s^q \cdot \delta_i^j + \delta_s^p \cdot \delta_i^q \cdot \delta_r^j + \delta_i^p \cdot \delta_r^q \cdot \delta_s^j - \delta_i^p \cdot \delta_s^q \cdot \delta_r^j - \delta_r^p \cdot \delta_i^q \cdot \delta_s^j - \delta_s^p \cdot \delta_r^q \cdot \delta_i^j$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \varphi_{ik} \cdot \varphi^{jk} &= -\frac{1}{4} (\delta_r^p \cdot \delta_s^q \cdot \delta_i^j + \delta_s^p \cdot \delta_i^q \cdot \delta_r^j + \delta_i^p \cdot \delta_r^q \cdot \delta_s^j - \delta_i^p \cdot \delta_s^q \cdot \delta_r^j - \delta_r^p \cdot \delta_i^q \cdot \delta_s^j - \delta_s^p \cdot \delta_r^q \cdot \delta_i^j) \cdot \hat{\varphi}_{pq} \cdot \hat{\varphi}^{rs} \\ \varphi_{ik} \cdot \varphi^{jk} &= -\frac{1}{4} (\hat{\varphi}^2 \cdot \delta_i^j + \hat{\varphi}_{si} \cdot \hat{\varphi}^{js} + \hat{\varphi}_{iq} \cdot \hat{\varphi}^{qj} - \hat{\varphi}_{is} \cdot \hat{\varphi}^{sj} - \hat{\varphi}_{ri} \cdot \hat{\varphi}^{rj} + \hat{\varphi}^2 \cdot \delta_i^j) \\ \varphi_{ik} \cdot \varphi^{jk} &= -\frac{1}{2} \hat{\varphi}^2 \cdot \delta_i^j + \hat{\varphi}_{ik} \cdot \hat{\varphi}^{jk} \end{aligned}$$

D'où, eu égard à (h3) :

$$T_i^j = \frac{1}{4} \varphi^2 \cdot \delta_i^j - \varphi_{ik} \cdot \varphi^{jk} = \frac{1}{4} \varphi^2 \cdot \delta_i^j + \frac{1}{2} \hat{\varphi}^2 \cdot \delta_i^j - \hat{\varphi}_{ik} \cdot \hat{\varphi}^{jk} = -\frac{1}{4} \varphi^2 \cdot \delta_i^j - \hat{\varphi}_{ik} \cdot \hat{\varphi}^{jk}$$

Et, tenant compte de (g) :

$$\boxed{T_i^j = -\frac{1}{2} (\varphi_{ik} \cdot \varphi^{jk} + \hat{\varphi}_{ik} \cdot \hat{\varphi}^{jk})} \quad (j)$$

Le tenseur d'énergie-impulsion électromagnétique apparaît invariant par substitution duale ( $T_i^j = \hat{T}_i^j$ ). Il en est donc de même de sa divergence, ce qui nécessite :

$$\boxed{T_{i,j}^j = \hat{T}_{i,j}^j = \varphi_{,k}^{jk} \cdot \varphi_{ij} + \hat{\varphi}_{,k}^{jk} \cdot \hat{\varphi}_{ij}} \quad (k)$$

Vérification :

$$\hat{\varphi}_{,k}^{jk} \cdot \hat{\varphi}_{ij} = -\frac{1}{4} \varepsilon^{rsqp} \cdot \varepsilon_{jkiq} \cdot \varphi_{rs,p} \cdot \varphi^{jk} = \frac{1}{4} \varepsilon^{rspq} \cdot \varepsilon_{jkiq} \cdot \varphi_{rs,p} \cdot \varphi^{jk}$$

Avec :

$$\varepsilon^{rspq} \cdot \varepsilon_{jkiq} = \delta_j^r \cdot \delta_k^s \cdot \delta_i^p + \delta_k^r \cdot \delta_i^s \cdot \delta_j^p + \delta_i^r \cdot \delta_j^s \cdot \delta_k^p - \delta_i^r \cdot \delta_k^s \cdot \delta_j^p - \delta_j^r \cdot \delta_i^s \cdot \delta_k^p - \delta_k^r \cdot \delta_j^s \cdot \delta_i^p$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{,k}^{jk} \cdot \hat{\varphi}_{ij} &= \frac{1}{4} (\delta_j^r \cdot \delta_k^s \cdot \delta_i^p + \delta_k^r \cdot \delta_i^s \cdot \delta_j^p + \delta_i^r \cdot \delta_j^s \cdot \delta_k^p - \delta_i^r \cdot \delta_k^s \cdot \delta_j^p - \delta_j^r \cdot \delta_i^s \cdot \delta_k^p - \delta_k^r \cdot \delta_j^s \cdot \delta_i^p) \cdot \varphi_{rs,p} \cdot \varphi^{jk} \\ \hat{\varphi}_{,k}^{jk} \cdot \hat{\varphi}_{ij} &= \frac{1}{4} (\varphi_{jk,i} + \varphi_{ki,j} + \varphi_{ij,k} - \varphi_{ik,j} - \varphi_{ji,k} - \varphi_{kj,i}) \cdot \varphi^{jk} = \frac{1}{2} (\varphi_{ij,k} + \varphi_{jk,i} + \varphi_{ki,j}) \cdot \varphi^{jk} \end{aligned}$$

D'où la relation (i).

### 7 – Cas où l'énergie électromagnétique se conserve

La conservation de l'énergie électromagnétique s'exprime en égalant à zéro la divergence du tenseur d'énergie électromagnétique (densité de force de Lorentz nulle) :

$$\boxed{T_{i,j}^j = \varphi_{,k}^{jk} \cdot \varphi_{ij} + \hat{\varphi}_{,k}^{jk} \cdot \hat{\varphi}_{ij} = 0} \quad (l)$$

Nous voyons d'emblée que les solutions des équations de Maxwell en l'absence de charge et de courant qui s'expriment sous forme tensorielle par :

$$\boxed{\varphi_{,k}^{jk} = 0 \quad \text{et} \quad \hat{\varphi}_{,k}^{jk} = 0 \quad \text{équivalente à} \quad \varphi_{ij,k} + \varphi_{jk,i} + \varphi_{ki,j} = 0} \quad (m1 \text{ et } m2)$$

sont aussi solutions de l'équation (l).

Nous cherchons un système d'équations plus général qui satisfasse à (l), invariant par substitution duale, fournissant les solutions des équations de Maxwell comme solutions particulières et dont les solutions générales répondent aux contraintes de continuité avec l'onde électromagnétique porteuse du quantum lumineux, c'est-à-dire respectant notamment la condition :

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{n} \wedge \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{n} \wedge \vec{B} \text{ par substitution duale, } n^2 = 1 \Rightarrow E^2 = B^2$$

Toutes ces conditions sont satisfaites, si et seulement si :

$$\boxed{\varphi_{,k}^{jk} \cdot \varphi_{ij} = 0 \text{ et } \hat{\varphi}_{,k}^{jk} \cdot \hat{\varphi}_{ij} = 0 \text{ équivalente à } (\varphi_{ij,k} + \varphi_{jk,i} + \varphi_{ki,j}) \cdot \varphi^{jk} = 0} \quad (n1 \text{ et } n2)$$

Ce sont des équations de Maxwell étendues. Elles constituent la base de notre recherche d'une singularité de l'onde porteuse pouvant constituer le quantum lumineux.

La condition de continuité avec l'onde porteuse exprimée ci-dessus est satisfaite en remarquant que  $|\varphi_{ij}| = |\hat{\varphi}_{ij}| = (\vec{E} \cdot \vec{B})^2$  doit être nul afin que le système (n1 et n2) admette des solutions autres que les solutions des équations triviales  $\varphi_{,k}^{jk} = 0$  et  $\hat{\varphi}_{,k}^{jk} = 0$ .

### 7 – Equations de Maxwell étendues en termes de champs électrique et magnétique

Les équations (n1 et n2) en termes classiques  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  s'écrivent :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} \cdot \text{div} \vec{E} - \vec{B} \wedge (\text{rot} \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) &= \vec{0} \\ \vec{E} \cdot (\text{rot} \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) &= 0 \\ \vec{B} \cdot \text{div} \vec{B} - \vec{E} \wedge (\text{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) &= \vec{0} \\ \vec{B} \cdot (\text{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) &= 0 \end{aligned}} \quad (o1, o2, o3 \text{ et } o4)$$

Nous vérifions que les solutions des équations de Maxwell classiques en l'absence de charge et de courant sont aussi solutions du système et que ce dernier est invariant par substitution duale.

### 8 – Equations de Maxwell étendues simplifiées

Suivant l'idée de Louis de Broglie exprimée dans sa thèse, nous allons montrer qu'il existe au moins une solution où l'essentiel de l'énergie électromagnétique peut apparaître sous forme de pics d'amplitude faisant partie d'une onde satisfaisant sensiblement aux équations de Maxwell.

Vérifions que les équations linéaires ci-après satisfont au système (o1, o2, o3 et o4) :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{n} \wedge \vec{E} \\ \text{rot} \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{n} \cdot \text{div}(\vec{E}) \\ \text{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\vec{n} \cdot \text{div}(\vec{B}) \end{aligned}} \quad (p1, p2, p3)$$

où  $\vec{n}$  désigne le vecteur direction de propagation de l'onde porteuse du photon

Nous vérifions aussi l'invariance par substitution duale du système. Une analyse approfondie montre que ce système d'équations est le seul qui puisse satisfaire à cette propriété et représente donc la seule façon de résoudre le système (o1, o2, o3 et o4).

Ces équations constituent donc l'extension des équations de Maxwell recherchée, qui ne diffèrent de ces dernières que par la présence de  $\text{div}(\vec{E}) \neq 0$  et  $\text{div}(\vec{B}) \neq 0$ .

Nous vérifions aisément qu'elles assurent la conservation de l'énergie de l'onde électromagnétique dans le vide comme les équations de Maxwell classiques. Ainsi, si nous admettons la conservation de l'énergie comme seul principe fondamental régissant l'onde électromagnétique dans le vide, nous sommes tentés de conclure que les équations de Maxwell étendues fournissent une description du phénomène de propagation de la lumière mieux adaptée à la réalité physique.

Dans un but de simplification, nous choisissons un repère trirectangle direct  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  tel que  $\vec{n} = \vec{z}$ ,  $\vec{E} = E.\vec{y}$  (polarisation rectiligne suivant  $\vec{y}$ ), et par suite  $\vec{B} = \vec{z} \wedge \vec{E} = -E.\vec{x}$  ; alors les équations (p2, p3) prennent la forme :

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}}(-E.\vec{x}) - \frac{\partial E.\vec{y}}{\partial t} = \vec{z}.\text{div}(E.\vec{y}) \\ \vec{\text{rot}}(E.\vec{y}) + \frac{\partial(-E.\vec{x})}{\partial t} = -\vec{z}.\text{div}(-E.\vec{x}) \end{cases}$$

Remarquons alors que toute fonction onde progressive de la forme  $E = E(x, y, z - t)$  est solution du système. En effet :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}}(-E.\vec{x}) - \frac{\partial E.\vec{y}}{\partial t} = \vec{z}.\text{div}(E.\vec{y}) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial z} \Leftrightarrow -\frac{\partial E}{\partial(z-t)} \cdot \frac{\partial(z-t)}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial(z-t)} \cdot \frac{\partial(z-t)}{\partial z} \Leftrightarrow \\ \frac{\partial E}{\partial(z-t)} = \frac{\partial E}{\partial(z-t)} \end{cases} \\ \vec{\text{rot}}(E.\vec{y}) + \frac{\partial(-E.\vec{x})}{\partial t} = -\vec{z}.\text{div}(-E.\vec{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\partial E}{\partial z} - \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\partial E}{\partial(z-t)} \cdot \frac{\partial(z-t)}{\partial z} - \frac{\partial E}{\partial(z-t)} \cdot \frac{\partial(z-t)}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \\ -\frac{\partial E}{\partial(z-t)} + \frac{\partial E}{\partial(z-t)} = 0 \\ 0 = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial x} \end{cases} \end{array} \right.$$

## 9 – Conclusion

Eu égard à l'infinité de solutions possibles, il apparaît que la théorie de Maxwell dans le vide, même dans la forme généralisée proposée, est inapte à fournir une position et une structure spatio-temporelle du corpuscule lumineux. Cette circonstance associée à la conservation de l'énergie-impulsion de l'onde dans le vide permet d'affirmer l'irréductibilité du caractère statistique de la théorie de Maxwell.

D'un point de vue heuristique, remarquons que les équations (p1, p2, p3) sont symétriques en  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  où  $\text{div}(\vec{E})$  représente une densité de charge électrique, et où  $\text{div}(\vec{B})$  peut être assimilé à une densité de charge magnétique qui, contrairement à la théorie classique, peut-être différente de zéro. Cependant, dans le cas d'une onde progressive harmonique ou d'un groupement d'ondes de ce type, le calcul montre que les charges du photon sont moyennement nulles dans le temps, en accord avec l'observation physique de sa neutralité électromagnétique.

**Conflit d'intérêt : aucun**

Orléans, le lundi 21 septembre 2015

Christian Preziosa

(\*) Je remercie Docteur Reine NEHME, Maître de Conférences à l'Université d'Orléans, pour la traduction en Anglais de l'introduction de l'article.

---

## Bibliographie

- [1] Einstein A. Quatre conférences sur la théorie de la relativité (mai 1921). Gauthier-Villars, Paris (1971).
- [2] De Broglie L. Recherches sur la théorie des quanta. Thèse de doctorat, Paris (25 novembre 1924).
- [3] Oskar Klein. Quantum theory and five dimensional theory of relativity. Z. Phys. 37 895-906 (1926).
- [4] Darrius G. Sur une forme remarquable des équations de Maxwell-Lorentz dans l'univers à 5 dimensions. J. Phys. Radium 8, 11 (1927) 444-446.
- [5] P. A. M. Dirac. Les principes de la mécanique quantique. Les Presses Universitaires de France, Paris (1931).
- [6] Lichnerowicz André. Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. Paris : Masson (1955).
- [7] De Broglie L. Nouvelles perspectives en Microphysique. Albin Michel, Paris (1956).
- [8] W. Heisenberg. Les principes physiques de la théorie des quanta. (1<sup>ère</sup> édition 1957). Gauthier-Villars, Paris (1972).
- [9] Yves Thiry. Théorie penta-dimensionnelle de la gravitation et de l'électromagnétisme. Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 2 (1958-1959), exp. n°1, p. 1-15.

- [10] De Broglie L. Jalons pour une nouvelle microphysique. Gauthier-Villars, Paris (1978).
- [11] J.-P. Duruisseau. Scalaire et Nouveaux Problèmes de la Relativité Générale: Horizons, Masses Limites. Thèse, Paris (1979).
- [12] Rousseaux G. Les équations de Maxwell sont-elles incomplètes ? Annales de la Fondation Louis de Broglie, Volume 26 numéro 4, 2001.
- [13] C. Preziosa. Sur une forme microscopique du tenseur d'énergie. ScienceLib Editions Mersenne : Volume 1, N° 081201 (publié le 30/12/2008).
- [14] C. Preziosa. Sur un fondement mécaniste des équations de Maxwell en Relativité Générale. ScienceLib Editions Mersenne : Volume 2, N° 100601 (publié le 04/06/2010)
- [15] C. Preziosa. Sur des équations de champ électromagnétique non linéaires en théorie de la double solution. ScienceLib Editions Mersenne : Volume 2, N° 101102 (publié le 15/11/2010)
-